5.15 As Funções Trigonométricas Hiperbólicas

Definição 5.15.1 *A função* $senh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ *é chamada de função Seno Hiperbólico de* x.

Definição 5.15.2 *A função* $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *é chamada de função Cosseno Hiperbólico de* x.

Essas funções aparecem com frequência nas aplicações de matemática e engenharia. Elas recebem esse nome pois as mesmas se relacionam com a hipérbole de uma forma muito similar a relação do seno e cosseno com a circunferência. Das definições anteriores é possível chegar ao primeiro resultado.

Teorema 5.15.1

$$D_x(senh(x)) = \cosh(x) \ \ e \ \ D_x(\cosh(x)) = senh(x).$$

Definição 5.15.3 *A função* $\tanh(x) = \dfrac{senh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *é chamada de função Tangente Hiperbólica de* x. *A função* $\coth(x) = \dfrac{\cosh(x)}{senh(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ *é chamada de função Cotangente Hiperbólica de* x. *A função* $sech(x) = \dfrac{1}{\cosh(x)} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$ *é chamada de função Secante Hiperbólica de* x. *A função* $cossech(x) = \dfrac{1}{senh(x)} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$ *é chamada de função Cossecante Hiperbólica de* x.

A seguir são apresentadas algumas identidades fundamentais.

Teorema 5.15.2

1. $\tanh(x)) = \dfrac{1}{\coth(x)}$;
2. $\cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$;
3. $1 - \tanh^2(x) = sech^2(x)$;
4. $1 - \coth^2(x) = -cossech^2(x)$;
5. $\cosh(x) + senh(x) = e^x$;
6. $\cosh(x) - senh(x) = e^{-x}$.

Teorema 5.15.3

1. $(\tanh(x))' = sech^2(x)$;
2. $(\coth(x))' = -cossech^2(x)$;
3. $(sech(x))' = -sech(x)\tanh(x)$;
4. $(cossech(x))' = -cossech(x)\coth(x)$.

Teorema 5.15.4 *1.* $\displaystyle\int senh(x)dx = \cosh(x) + k;$

2. $\displaystyle\int \cosh(x)dx = senh(x) + k;$

3. $\displaystyle\int sech^2(x)dx = \tanh(x) + k;$

4. $\displaystyle\int cossech^2(x)dx = -\coth(x) + k;$

5. $\displaystyle\int sech(x)\tanh(x)dx = -sech(x) + k;$

6. $\displaystyle\int cossec(x)\coth(x)dx = cossech(x) + k;$

Exemplo 5.15.1 *Calcule:*

1. $D_x(\tanh(1-x^2));$

2. $D_x(x(senh(x)));$

3. $\displaystyle\int senh(x)\cosh^2(x)dx;$

4. $\displaystyle\int \tanh^2(x)dx.$

Solução:

1. Tem=se que

$$D_x(\tanh(1-x^2)) = sech^2(1-x^2)\times D_x(1-x^2) = -2xsech^2(1-x^2).$$

2. Tem-se que

$$D_x(x(senh(x))) = (x)'senh(x) + x(senh(x))' = senh(x) + x\cosh(x).$$

3. Seja $u = \cosh(x)$, então $du = senh(x)dx$. Assim,

$$\int senh(x)\cosh^2(x)dx = \int \cosh^2(x)[senh(x)dx] = \int u^2du =$$

$$= \frac{u^3}{3} + k = \frac{\cosh^3(x)}{3} + k.$$

4. Das identidades trigonométricas, segue que $\tanh^2(x) = 1 - sech^2(x)$. Assim,

$$\int \tanh^2(x)dx = \int(1-sech^2(x))dx = \int dx - \int sech^2(x) =$$

$$= x - \tanh(x) + k.$$

$\square$

Agora faça alguns exercícios para fixar os conhecimentos.

Exercício 5.15.1 *Calcule a derivada de cada uma das funções a seguir.*

1. $f(x) = \tanh\left(\dfrac{4x+1}{5}\right)$;
2. $f(y) = senh(e^{2y})$;
3. $g(z) = sech^2(4z)$;
4. $f(t) = e^t \cosh(t)$;
5. $f(x) = \ln(\tanh(x))$.

Exercício 5.15.2 *Calcule cada uma das integrais indefinidas a seguir.*

1. $\displaystyle\int e^t \cosh(e^t) senh(e^t) dt$;
2. $\displaystyle\int \frac{senh(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} dy$;
3. $\displaystyle\int \coth^2(3z) dz$;
4. $\displaystyle\int sech^2(t) \tanh^5(t) dt$;
5. $\displaystyle\int \tanh(x) \ln(\cosh(x)) dx$.

Exercício 5.15.3 *Uma partícula move-se ao longo de uma linha reta de acordo com a equação do movimento* $s(t) = e^{-ct/2}(Asenh(t) + B\cosh(t))$, *onde* s *cm é a distância orientada da partícula até a origem em* t *s. Se* v *cm/s e* a *cm/s^2 são, respectivamente, a velocidade e a aceleração da partícula em* t, *encontre* v *e* a.