5.13 Integrais Impróprias

A ideia aqui é estender a ideia de integral definida para intervalos infinitos. Veja as definições a seguir.

Definição 5.13.1 *Se f é contínua para todo $x \geq a$, então*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

se o limite existir.

Definição 5.13.2 *Se f é contínua para todo $x \leq b$, então*

$$\int_{+\infty}^a f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx,$$

se o limite existir.

Definição 5.13.3 *Se f é contínua para todo x e se c é um número real qualquer, então*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty} \int_c^b f(x)dx,$$

se o limite existir.

Definição 5.13.4 *Se o limite de uma integral imprópria existe, então dz-se que a integral converge. Caso contrário, diz-se que a integral diverge.*

Agora, vamos aos exemplos.

Exemplo 5.13.1 *Qual o valor da área da região delimitada pela curva $y = e^{-x}$, o eixo x e a reta $x = 0$.*

Solução: Como a função $f(x) = e^{-x} > 0$, para todo x, segue que a área da região fica dada por

$$A = \int_0^{+\infty} (e^{-x} - 0) \Rightarrow A = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty} e^{-x}\Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \left(-e^{-b} - (-e^0)\right) = 1 - \lim_{b\to+\infty} e^{-b} = 1 - 0 = 1 \ u.a..$$

□

Exemplo 5.13.2 *Calcule cada uma das integrais a seguir, se ela convergir.*

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^2 \frac{dx}{(4-x)^2}$;

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$;

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$*;*

Solução:

1. Tem-se que
$$\int_{-\infty}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2}.$$
Assim, considerando $u = 4 - x$, segue que $du = -dx$ e, consequentemente,
$$\lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{2} \frac{dx}{(4-x)^2} = \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{2} -\frac{du}{u^2} = -\lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{2} u^{-2} du =$$
$$= -\lim_{b\to-\infty} \left.\frac{u^{-1}}{-1}\right|_{b}^{2} = \lim_{b\to-\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{2} - \lim_{b\to-\infty} \frac{1}{b} = \frac{1}{2}.$$

2. Tem-se que
$$\int_{0}^{+\infty} xe^{-x} dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} xe^{-x} dx.$$
Assim, considerando Se $u = x$ e $dv = e^{-x}dx$, então $du = dx$ e $v = -e^{-x}$ e, consequentemente,
$$\int xe^{-x} dx = x(-e^{-x}) - \int (-e^{-x})(dx) = -xe^{-x} - e^{-x} + k.$$
Daí, segue que
$$\lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} xe^{-x} dx = -\lim_{b\to+\infty} \left.\left(e^{-x} + xe^{-x}\right)\right|_{0}^{b} =$$
$$= -\lim_{b\to+\infty} \left((be^{-b} + e^{-b}) - (e^{0} + 0)\right) = 1 - \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{b}{e^b} + \frac{1}{e^b}\right).$$
Como $\lim_{b\to+\infty} b = +\infty$ e $\lim_{b\to+\infty} e^b = +\infty$, pela regra de L'Hôpital, segue que
$$\lim_{b\to+\infty} \frac{b}{e^b} = \lim_{b\to+\infty} \frac{(b)'}{(e^b)'} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^b} = 0,$$
segue que
$$\lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} xe^{-x} dx = 1 - \lim_{b\to+\infty} \frac{b}{e^b} - \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{e^b} = 1.$$

3. Tem-se que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = \lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{0} x dx + \lim_{b\to+\infty} \int_{0}^{b} x dx.$$
Assim, como
$$\lim_{b\to-\infty} \int_{b}^{0} x dx = \lim_{b\to-\infty} \left.\left(\frac{x^2}{2}\right)\right|_{b}^{0} = \lim_{b\to-\infty} -\frac{b^2}{2} = -\infty,$$
segue que a integral diverge.

□

Agora, faça alguns exercícios.

5.14 Exercícios

Exercício 5.14.1 *Determine se cada uma das integrais a seguir diverge ou converge.*

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} dx;$

2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x5^{-x^2} dx;$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x2^{-x} dx;$

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}} dx;$

Exercício 5.14.2 *A integral imprópria* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(1+x^2)^{-2} dx$ *é convergente? E a integral imprópria* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(1+x^2)^{-1} dx$*?*

Exemplo 5.14.1 *Qual o valor da área, no segundo quadrante, da região delimitada pela curva* $y = e^x$*, o eixo* x *e a reta* $x = 0$*?*

Exemplo 5.14.2 *Qual o valor da área da região delimitada pela curva* $y = 3^{-x}$*, o eixo* x *e a reta* $x = 2$*?*

Exemplo 5.14.3 *Qual o valor da área, no segundo quadrante, da região delimitada pela curva* $y = 2^x$*, o eixo* x *e a reta* $x = 0$*?*