5.11 Integração por Partes

O valor de uma integral definida é fácil de ser obtido, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, desde que se conheça uma antiderivada da função. Neste seção será discutido uma das técnicas para facilitar a obtenção desta antiderivada. Até agora, foram construídas algumas antiderivadas pela definição das funções, sendo estas as usadas de maneira mais frequentes, dentre elas:

1. $\int du = u + k;$

2. $\int adu = au + k;$

3. $\int [f(u) + g(u)]du = \int f(u)du + \int g(u)du;$

4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + k,\ \forall n \neq -1;$

5. $\int \frac{du}{u} = \ln(|u|) + k;$

6. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)} + k$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$;

7. $\int e^u du = e^u + k;$

8. $\int \cos(u)du = sen(u) + k;$

9. $\int sen(u)du = -\cos(u) + k$

10. $\int \sec^2(u)du = \tan(u) + k;$

11. $\int cossec^2(u)du = \cot(u) + k;$

12. $\int \sec(u)\tan(u)du = \sec(u) + k;$

13. $\int cossec(u)\cot(u)du = -cosec(u) + k.$

Da fórmula da derivada entre o produto de duas funções surge uma técnica de integração chamada Integração por Partes. Tem-se que se f e g são duas funções diferenciáveis, então:

$$D_x(f \times g)(x)) = D_x(f(x)) \times g(x) + f(x) \times D_x(g(x)).$$

Para simplificar, considerando $u = f(x)$, $v = g(x)$, $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$, segue que

$$(uv)' = udv + vdu.$$

Integrando os dois lados, segue que

$$\int (uv)'dx = \int udv + \int vdu \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu.$$

Portanto, é possível substituir uma integral por outra, que seja mais simples de ser resolvida, utilizando a expressão anterior, chamada de Fórmula de Integração por Partes. É importante ressaltar que para usar essa mudança de integral é necessário encontrar a integral de dv e, por isso, dependendo da sua escolha o problema pode ficar pior do que no caso anterior. Agora vamos a alguns exemplos.

Exemplo 5.11.1 *Calcule* $\int x\ln(x)dx$.

Solução: Para esse exemplo, observe que se $dv = \ln(x)$, então v será a integral de $\ln(x)$. Por outro lado, considerando $u = \ln(x)$ e $dv = xdx$, segue que $du = \frac{1}{x}dx$ e $v = \frac{x^2}{2} + k$. Assim, utilizando a fórmula de integração por partes, segue que:

$$\int x\ln(x)dx = \ln(x) \times \left(\frac{x^2}{2} + k\right) - \int \left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x^2}{2} + k\right) dx =$$

$$= \frac{x^2\ln(x)}{2} + k\ln(x) - \int \left(\frac{x}{2} + \frac{k}{x}\right) =$$

$$= \frac{x^2\ln(x)}{2} + k\ln(x) - \frac{x^2}{4} - k\ln(x) + k_2 = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4} + k_2.$$

□

Exemplo 5.11.2 *Calcule* $\int x^3 e^{x^2} dx$.

Solução: Tem-se que $D_x(e^{x^2}) = 2xe^{x^2}$. Então, parece natural que $dv = xe^{x^2}dx$ e, consequentemente, $u = x^2$. Assim, $du = 2xdx$ e $v = \frac{e^{x^2}}{2} + k$. Então, usando a fórmula de integração por partes, segue que

$$\int x^3 e^{x^2} dx = (x^2)\left(\frac{e^{x^2}}{2} + k\right) - \int (2x)\left(\frac{e^{x^2}}{2} + k\right) dx =$$

$$= \frac{x^2 e^{x^2}}{2} + kx^2 - \int \left(xe^{x^2} + 2xk\right) dx =$$

$$= \frac{x^2 e^{x^2}}{2} + kx^2 - \frac{e^{x^2}}{2} - kx^2 + k_2 = \frac{(x^2-1)e^{x^2}}{2} + k_2.$$

□

Nos dois exemplos pode-se perceber que qualquer primitiva de dv apresenta o mesmo resultado final, já que a primeira constante não aparece no resultado final. Sendo assim, a partir de agora a primitiva de dv que será usada é a de constante $k = 0$.

Exemplo 5.11.3 *Calcule* $\displaystyle\int x\cos(x)dx$.

Solução: Tem-se que se $u = x$ e $dv = \cos(x)dx$, então $du = dx$ e $v = sen(x)$. Assim,

$$\int x\cos(x)dx = (x)(sen(x)) - \int (sen(x))(dx) =$$

$$= xsen(x) - \cos(x) + k.$$

□

Exemplo 5.11.4 *Calcule* $\displaystyle\int x^2e^x dx$.

Solução: Se $u = x^2$ e $dv = e^x dx$, então $du = 2xe^x$ e $v = e^x$. Daí,

$$\int x^2e^x dx = (x^2)(e^x) - \int (e^x)(2xdx) = x^2e^x - 2\int xe^x dx.$$

É preciso agora resolver a integral $\displaystyle\int xe^x dx$. Se $z = x$ e $dw = e^x dx$, então $dz = dx$ e $w = e^x$ e, consequentemente,

$$\int xe^x dx = (x)(e^x) - \int (e^x)(dx) = xe^x - e^x + k.$$

Portanto,

$$\int x^2e^x dx = x^2e^x - 2(xe^x - e^x + k) = (x^2 - 2x - 2)e^x + k_2.$$

□

Exemplo 5.11.5 *Calcule* $\displaystyle\int e^x sen(x)dx$.

Solução: Se $u = e^x$ e $dv = sen(x)dx$, segue que $du = e^x dx$ e $v = -\cos(x)$, Assim,

$$\int e^x sen(x)dx = -e^x\cos(x) - \int (-\cos(x))e^x dx = -e^x\cos(x) + \int e^x\cos(x)dx.$$

Considerando $z = e^x$ e $dw = \cos(x)dx$, segue que $dz = e^x dx$ e $w = sen(x)$ e, consequentemente,

$$\int e^x\cos(x)dx = e^x sen(x) - \int e^x sen(x)dx + k.$$

Portanto,

$$\int e^x sen(x)dx = -e^x \cos(x) + (e^x sen(x) - \int e^x sen(x)dx + k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\int e^x sen(x)dx = e^x(sen(x) - \cos(x)) + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int e^x sen(x)dx = \frac{e^x(sen(x) - \cos(x))}{2} + k_2.$$

□

Agora vamos a alguns exercícios.

5.12 Exercícios

Exercício 5.12.1 *Calcule cada uma das integrais indefinidas a seguir.*

1. $\int xe^{3x}dx$;
2. $\int x\sec(x)\tan(x)dx$;
3. $\int \ln(x)dx$;
4. $\int (\ln(x))^2dx$;
5. $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$;
6. $\int sen(x)\ln(\cos(x))dx$.

Exercício 5.12.2 *Calcule cada uma das integrais definidas a seguir.*

1. $\int_0^2 x^2 3^x dx$;
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen(3x)\cos(x)dx$;
3. $\int_0^2 xe^{2x}dx$;
4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x}\ sen(4x)dx$;
5.

Exercício 5.12.3 *Ache a área da região limitada pela curva $y = \ln(x)$, pelo eixo X e pela reta $x = e^2$.*

Exercício 5.12.4 *A função custo marginal é C', sendo $C'(x) = \ln(x)$, com $x > 1$. Qual é a função custo total $C(x)$ da produção de x unidades, sendo $C(1) = 5$.*