3.5 Divergência de um Campo Vetorial

O primeiro operador que estudamos, o Gradiente de uma Função, estava relacionado a funções escalares, ou seja, o operador ∇ aplicado a uma função escalar, gerava um vetor formado pelas derivadas parciais de primeira ordem da função.

A seguir introduziremos outro operador. Contudo, este novo operador está relacionado a funções vetoriais. Este operador é chamado de Divergente ou Divergência de uma função vetorial. Vamos a definição.

Definição 3.5.1 *Seja $\vec{f}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ um campo vetorial dada por $\vec{f}(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega), \cdots, f_n(\omega))$. Se as derivadas de primeira ordem $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}$ existem e são contínuas, então definimos a Divergência do campo vetorial $\vec{f}$, denotado por $div\vec{f}$, pela função escalar*

$$div\vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}.$$

Como comentamos no início desta seção, podemos definir um novo operador, chamado de operador Nabla, dado por $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$. Desta forma, sendo a função vetorial f dada por $\vec{f} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$, podemos reescrever o $div\vec{f}$ com a notação de um produto escalar, dado por:

$$div\vec{f} = \nabla \cdot \vec{f}.$$

Observe que o operador ∇ não é uma função e, por isto, não estamos fazendo um produto escalar entre ∇ e $\vec{f}$, apesar de queremos induzir esta ideia. Agora, vamos a alguns exemplos.

Exemplo 3.5.1 *Dado o campo vetorial $\vec{f}(x, y, z) = (2x^4, e^{xy}, xyz)$, calcule $div\vec{f}$.*
SOLUÇÃO: *Temos que*

$$div\vec{f} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^4) + \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 8x^3 + xe^{xy} + xy.$$

Exemplo 3.5.2 *Dado o campo vetorial*

$$\vec{g}(x, y, z) = (\cos^4(xyz), ln(x^2y^2z^2), 5x^2 - 4y^3 + 3z^3),$$

calcule $div\vec{g}$.
SOLUÇÃO: *Temos que*

$$div\vec{g} = \frac{\partial}{\partial x}(\cos^4(xyz)) + \frac{\partial}{\partial y}(ln(x^2y^2z^2)) + \frac{\partial}{\partial z}(5x^2 - 4y^3 + 3z^3) =$$

$$= -4yzsen(xyz)\cos^3(xyz) + \frac{2}{z} + 9z^2.$$

Utilizando a definição de divergente e as propriedades de derivadas parciais de funções, podemos provar que são válidas algumas propriedades envolvendo o divergente de uma função. Assim, sendo $\vec{f}, \vec{g} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funções vetoriais e sendo $h : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função escalar diferenciável em D, se $div\vec{f}$ e $div\vec{g}$ existem, então segue que:

1. $div(\vec{f} \pm \vec{g}) = div\vec{f} \pm div\vec{g}$;
2. $div(h\vec{f}) = hdiv\vec{f} + \nabla h \cdot \vec{f}$.

Agora vamos definir outro operador importante na matemática. Para isto, suponha que as derivadas parciais de segunda ordem de uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ existam. Então, é possível determinar o $div(grad(f))$. Como

$$grad(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

segue que

$$div(grad(f)) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Ou seja,

$$div(grad(f)) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Portanto, definindo o operador $\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$ temos que

$$div(grad(f)) = \nabla^2 f.$$

O operador diferencial ∇^2 é chamado de *Laplaciano*. Ele é muito utilizado no mundo físico, principalmente no estudo de equações. A equação

$$\nabla^2 f = 0$$

é chamada de *Equação de Laplace*. Agora, vamos falar de uma interpretação física para o divergente.

Interpretação Física do Divergente

Na Mecânica dos Fluidos, encontramos uma equação importante, chamada de Equação da Continuidade. Esta equação é definida por

$$div\vec{u} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

onde $\vec{u} = \rho\vec{v}$, sendo $\rho = \rho(x, y, z, t)$ a densidade do fluido que depende da posição e do tempo e $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$ o vetor velocidade, também dependente da posição e do tempo. Reescrevendo a equação da continuidade, temos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div\vec{u}.$$

Logo, a divergência de um campo vetorial pode ser visto como uma medida da taxa de variação da densidade do fluido em um ponto. Assim, quando a divergência é positiva em um ponto do fluido, a sua densidade está diminuindo com o passar do tempo.

Nesse caso, dizem que o fluido está expandindo (ou que existe uma fonte de fluxo no ponto). Caso a divergência seja negativa, o líquido está contraindo e, por isto, a densidade do líquido estará aumentando com o passar do tempo.

Por outro lado, se a divergência é zero em todos os pontos de uma região, então temos que o fluxo de entrada na região é exatamente equilibrado pelo fluxo de saída. Logo, o fluxo não é criado nem destruído, ou seja, não existe fonte nem semi-douro na região.

Assim, se a densidade de um líquido dada por uma função é constante em relação ao tempo, então temos que a equação da continuidade fica dada por $div\vec{v} = 0$, e o campo vetorial $\vec{v}$ é chamado de *Campo Solenoidal.*

Agora, vamos a alguns exemplos.

Exemplo 3.5.3 *Um fluido escoa em movimento uniforme com velocidade $\vec{v} = x\vec{j}$. Mostre que todas as partículas se deslocam em linha reta e que o campo de velocidade dado representam um possível escoamento incompressível.*
SOLUÇÃO*: Um fluido incompressível tem o fluxo de entrada igual ao fluxo de saída e, por isto, o fluido será incompressível se $div\vec{v} = 0$. Desta forma, como*

$$div\vec{v} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0,$$

em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$, segue que o campo velocidade representa um possível escoamento incompressível.

Por outro lado, uma representação gráfica do campo vetorial $\vec{v}$, dada pela Figura 3.10.

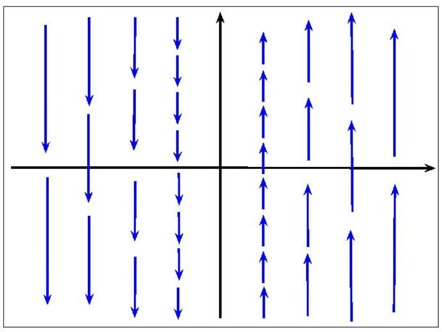

Figura 3.10: Representação do campo vetorial $\vec{v} = (0, x, 0)$.

Como os vetores velocidades estão todos apontando na mesma direção, segue que o movimento das partículas é linear, pois caso contrário os vetores velocidades apontariam para direções diferentes. Portanto, o líquido se desloca em linha reta.

Exemplo 3.5.4 *Um campo de escoamento compressível é descrito por*

$$\vec{u}(x, y, t) = \rho(x, y, t)\vec{v}(x, y, t) = (2xe^{-t}, -xye^{-t}),$$

onde x e y são as coordenadas do vetor posição (dadas em metros), t é a coordenada que representa o tempo (em segundos), ρ representa a densidade e $\vec{v}$ representa a velocidade (dados em kg/m^3 e m/s, respectivamente). Calcule a taxa de variação da densidade ρ em relação ao tempo, no ponto $P(3, 2)$ e com $t = 0$.

SOLUÇÃO: *Temos que a derivada da densidade, em relação ao tempo, é dada pela equação da continuidade, isto é,*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -div\vec{u}.$$

Por isto, como a taxa de variação da densidade em relação ao tempo é igual ao valor da derivada da densidade em relação ao tempo, segue que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(P^*) = -(2e^{-t} - xe^{-t} + 0)|_{P^*} = -(2 - 3) = 1kg/m^3 s,$$

onde $P^*(x, y, t) = (3, 2, 0)$.

Exemplo 3.5.5 *Para um escoamento no plano XY, a componente em y da velocidade é dada por $y^2 - 2x + 2y$. Determine uma possível componente em x para que o escoamento seja um possível escoamento incompressível.*

SOLUÇÃO: *Para que um escoamento no plano XY seja incompressível, é necessário que $div(\vec{v}) = 0$, onde $\vec{v}$ é o vetor velocidade e o mesmo tem que ser dado por $\vec{v} = (v_1, y^2 - 2x + 2y)$. Assim, temos que ter que*

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial v_1}{\partial x} + 2y + 2 = 0.$$

Desta forma, precisamos que $\dfrac{\partial v_1}{\partial x} = -2y - 2$ e, por isto, $v_1 = \int(-2y-2)dx + a(y) = -2xy - 2x + a(y)$, sendo $a(y)$ uma função qualquer em y.

Exemplo 3.5.6 *Quando uma função escalar $fx, y, z)$ tem derivadas de segunda ordem contínuas e sendo $div(\nabla(f)) = 0$ num domínio, segue que f é chamada de Função Harmônica nesse domínio. Verifique se as seguintes funções são harmônicas:*

1. $f(x, y, z) = x^2 y + e^y - z$;
2. $f(x, y, z) = 2xy + yz$;

SOLUÇÃO: *Uma função escalar é harmônica se, e somente se, a função f satisfaz a equação de Laplace. Assim:*

a) Como $\nabla f(x, y, z) = (2xy, x^2 + e^y, -1) \Rightarrow \nabla^2 f = 2y + e^y \neq 0$, segue que a função $f(x, y, z) = x^2 y + e^y - z$ não é uma função harmônica.

b) Como $\nabla f(x,y,z) = (2y, 2x+z, y) \Rightarrow \nabla^2 f = 0$ e f é um polinômio (f tem derivadas parciais contínuas de qualquer ordem), segue que a função $f(x,y,z) = x^2y + e^y - z$ é uma função harmônica.

Da equação da continuidade, temos que

$$div(\vec{u}) = div(\rho\vec{v}) = \rho div(\vec{v}) + \nabla\rho\vec{v}.$$

Desta forma, podemos reescrever a equação da continuidade por

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \cdot div(\vec{v}) + \nabla\rho \cdot \vec{v} = 0.$$

3.6 Exercício

Exercício 3.6.1 *Dado o campo vetorial $\vec{f}$, encontre $div(\vec{f})$.*

1. $\vec{f}(x,y) = (2x^4, e^{xy})$;
2. $\vec{f}(x,y) = (sen^2(x), 2cos(x))$;
3. $\vec{f}(x,y,z) = (2x^2y^2, 3xyz, y^2z)$;
4. $\vec{f}(x,y,z) = (ln(xy), x, z)$;
5. $\vec{f}(x,y,z) = (2x+4z, y-z, 3x-yz)$;
6. $\vec{f}(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$;
7. $\vec{f}(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$;
8. $\vec{f}(x,y) = (e^x\cos(y), e^x sen(y))$;
9. $\vec{f}(x,y,z) = (xyz^3, 2xy^3, -x^2yz)$;
10. $\vec{f}(x,y) = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$, *para* $(x,y) \neq (0,0)$;
11. $\vec{f}(x,y,z) = (xy^2z, 2xy^2z, 3xy^2z)$.

Exercício 3.6.2 *Sendo $\vec{u} = (x^2-y^2).\nabla(f)$, calcule $div(\vec{u})$ no ponto $P = (1,2,3)$, sabendo que $f(x,y,z) = sen(xy) + z$.*

Exercício 3.6.3 *Sendo $\vec{u} = (x^2-y^2).\nabla(f)$, calcule $div(\vec{u})$ no ponto $P = (-1,2,-1)$, sabendo que $f(x,y,z) = xyz + 2xy$.*

Exercício 3.6.4 *Um fluido escoa em movimento uniforme com velocidade $\vec{v}$ dada. Verifique se $\vec{v}$ representa um possível fluxo incompressível.*

1. $\vec{v}(x,y,z) = (z^2, x, y^2)$;
2. $\vec{v}(x,y,z) = (2, x, -1)$;

3. $\vec{v}(x, y) = (2xy, x)$;
4. $\vec{v}(x, y) = (2y - 3, x^2)$;
5. $\vec{v}(x, y) = (-y, x)$;
6. $\vec{v}(x, y, z) = (2xz, -2yz, 2z)$.

Exercício 3.6.5 *Verifique se as seguintes funções são harmônicas em algum domínio D.*

1. $f(x, y, z) = yz + \ln(xy)$;
2. $f(x, y) = 2(x^2 - y^2) + y + 10$;
3. $f(x, y) = sen(x) \cosh(y)$;
4. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$;
5. $f(x, y, z) = x^2 - \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{z^2}{2}$;
6. $f(x, y, z) = x + y + z$;
7. $f(x, y) = e^x \cos(y)$.

Exercício 3.6.6 *Mostre que a função* $f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ *é uma função harmônica.*

Exercício 3.6.7 *Prove que o campo vetorial* $\vec{v}(x, y, z) = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, *com* $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$, *é um campo solenoidal fora da origem.*