Capítulo 3

Operadores Vetoriais e Aplicações

Vamos agora estudar alguns operadores relacionados a funções escalares e funções vetoriais. Vamos iniciar o nosso estudo diferenciando *Campos Escalares* de *Campos Vetoriais*.

3.1 Campos Escalares e Campos Vetoriais

Dada uma região D do espaço, é possível associar a cada ponto $P = (x, y, z)$ desta região D a uma grandeza escalar. Por exemplo, dado um corpo sólido T, podemos associar a cada um dos seus pontos a sua temperatura. Este novo conjunto, formado pelos elementos de D e os pontos que foram associados a eles é chamado de Campo Escalar, como definido a seguir.

Definição 3.1.1 *Seja D uma região no espaço e seja f uma função escalar definida em D. Então, a cada ponto $P \in D$ a função f associa uma única grandeza escalar $f(P)$. A região D, junto com todos os valores correspondente de $f(P)$, é chamado de Campo Escalar. Dizemos também que f define um campo escalar sobre D.*

Os exemplos a seguir ilustram alguns campos escalares.

Exemplo 3.1.1

1. *Se D é um sólido no espaço e ρ e a densidade de cada um dos pontos do sólido D, então ρ define um campo escalar sobre D.*
2. *Se D um sólido esférico de raio r cuja temperatura em cada um dos seus pontos é proporcional à distância do ponto até o centro da esfera, então a função escalar T define um campo escalar de temperatura em D.*

Exemplo 3.1.2 *Um tanque T tem a forma de um cilindro circular reto de raio $1m$ e altura $3m$. O tanque está cheio de uma substância líquida. Cada partícula desta substância está sujeita a uma pressão que é proporcional à* *distância da partícula até a superfície livre do líquido. Usando coordenadas cartesianas, defina uma função escalar que descreva o campo de pressão no interior de T.*

SOLUÇÃO: *Tome o sistema de coordenadas cartesianas de forma que a origem do sistema coincida com ao centro da base do cilindro. Assim, temos que a distância que qualquer partícula até a superfície livre do líquido é dada por $d = 3 - z$, onde z é a distância da partícula ao plano XY.*

Portanto, a função P que define o campo escalar de pressão no interior de T é dada por $P(x, y, z) = k(3 - z)$, onde k é uma constante de proporcionalidade.

Exemplo 3.1.3 *Um campo minado pode visto como um campo escalar sobre uma região R do plano, da seguinte forma: considere um campo de área $R \subset \mathbb{R}^2$, onde serão escolhidos pontos aleatórios nos quais serão colocados explosivos. Então, se for considerada a função escalar*

$$f(P) = \begin{cases} 1, \texttt{se existe uma mina em } P \in R; \\ 0, \texttt{caso contrário.} \end{cases}$$

então f define um campo escalar sobre a região R.

Usando a mesma ideia, se utilizarmos uma função vetorial em vez de uma função escalar, teremos os Campos Vetoriais, como definidos a seguir.

Definição 3.1.2 *Seja D uma região no espaço e seja $\vec{f}$ uma função vetorial definida em D. Então, a cada ponto $P \in D$ associamos a um único vetor $\vec{f}(P)$. A região D juntamente com todos os vetores correspondentes $\vec{f}(P)$ é chamado de Campo Vetorial. Dizemos também que $\vec{f}$ define um campo vetorial sobre D.*

Campos vetoriais são usados constantemente em muitas áreas do conhecimento. A representação de campos vetoriais pode ser visto até mesmo quando assistimos o canal do tempo. Conhecer o comportamento de um campo vetorial através de sua representação gráfica ajudar a resolver problemas diversos. Vamos aos exemplos.

Exemplo 3.1.4
1. *Seja D a atmosfera da Terra. Se a cada ponto $P \in D$ associarmos o vetor $\vec{v}(P)$ que representa a velocidade do vento em P, então $\vec{v}$ define um campo vetorial em D, chamado de Campo de Velocidades.*
2. *Temos que $\vec{f}(x, y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$ define um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^2$.*
3. *Temos que $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, -z)$ define um campo vetorial sobre $\mathbb{R}^3$.*

Geralmente identificamos uma função f como sendo o campo escalar que ela define. Analogamente, identificamos a função $\vec{f}$ como sendo o campo vetorial definido por ela. Assim, por exemplo, no Exemplo 3.1.2 o campo escalar é $P(x,y,z) = k(3-z)$, onde k é uma constante de proporcionalidade.

Por isto, de agora em diante falaremos que f é o campo escapar ou que $\vec{f}$ é o campo vetorial, só para simplificar os enunciados. Vamos a um exemplo.

Exemplo 3.1.5 *Considere o campo vetorial* $\vec{f}(x,y) = \left(x, \dfrac{y}{2}\right)$. *Represente os elementos do campo vetorial dos pontos* $(1,2)$, $(-1,3)$ *e* $(-2,-2)$.
Solução: *Temos que*

- $\vec{f}(1,2) = \left(1, \dfrac{2}{2}\right) = (1,1)$;
- $\vec{f}(-1,3) = \left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$;
- $\vec{f}(-2,-2) = \left(-2, \dfrac{-2}{2}\right) = (-2,-1)$.

Então, representando cada um destes vetores no plano, obtemos a Figura 3.1.

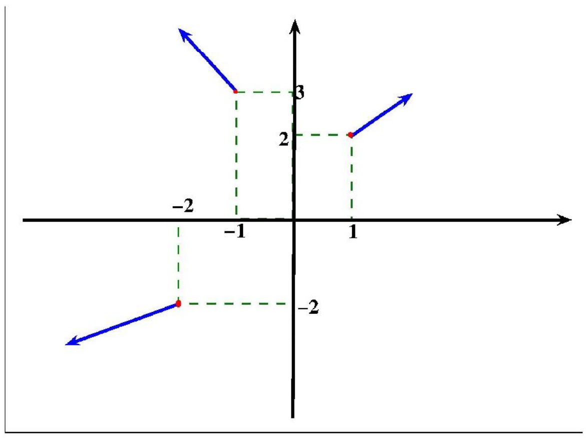

Figura 3.1: Representação de elementos do campo vetorial $\vec{f}(x,y) = \left(x, \dfrac{y}{2}\right)$.

Agora vamos falar da representação de campos vetoriais.

Representação Geométrica de um Campo Vetorial

É possível representar graficamente um campo vetorial $\vec{f}$ definido em uma região D. Para isto, tomamos alguns pontos $P \in D$ e desenhamos o vetor $\vec{f}(P)$ correspondente, como sendo uma seta com a origem em P (fazendo uma translação da origem para P). Assim, visualizaremos o campo vetorial, “imaginando” a seta apropriada emanando de cada ponto da região D.

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 3.1.6 *Considere o campo vetorial definido por* $\vec{f}(x,y) = x\vec{i}$. *Logo* $\vec{f}$ *define um campo vetorial sobre o* $\mathbb{R}^2$. *Além disso:*

- *A todos os pontos do eixo* y, *isto é, a todos os pontos da forma* $(0,y)$ *temos que* $\vec{f}$ *o associa ao vetor nulo, ou seja,* $\vec{f}(0,y) = \vec{0}$;
- *A todos os pontos da reta* $x = 1$, *ou seja, a todos os pontos da forma* $(1,y)$ *temos que* $\vec{f}(1,y) = \vec{i}$;
- *A todos os pontos da reta* $x = -1$, *ou seja, a todos os pontos da forma* $(-1,y)$ *temos que* $\vec{f}(-1,y) = -\vec{i}$;
- *A todos os pontos da reta* $x = 2$, *ou seja, a todos os pontos da forma* $(2,y)$ *temos que* $\vec{f}(2,y) = 2\vec{i}$;
- *A todos os pontos da reta* $x = -2$, *ou seja, a todos os pontos da forma* $(-2,y)$ *temos que* $\vec{f}(-2,y) = -2\vec{i}$;
- *E assim por diante...*

De uma forma geral, temos que $\vec{f}$ *associa a todos os pontos que estão sobre uma reta vertical* $x = a$ *ao vetor* $a\vec{i}$. *Assim, na Figura 3.2 temos uma representação deste campo.*

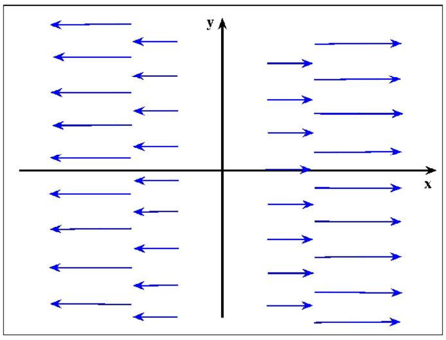

Figura 3.2: Representação do campo vetorial definido por $\vec{f}(x,y) = x\vec{i}$.

Exemplo 3.1.7 *Considere o campo escalar definido por* $\vec{f}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$. *Assim,* $\vec{f}$ *associa a cada ponto* (x,y) *do plano o seu vetor posição* $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$. *Para representar este campo, trace algumas retas passando pela origem e algumas circunferências com centro na origem. Desenhe os vetores correspondentes aos pontos de intersecção das circunferências com as retas, como visto na Figura 3.2.*

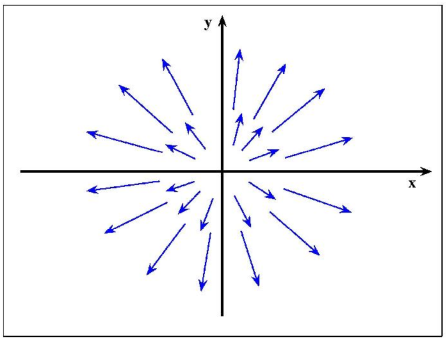

Figura 3.3: Representação do campo vetorial $\vec{f}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Exemplo 3.1.8 *Considere o campo vetorial definido por*

$$\vec{f}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}.$$

Então, para todos os pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *temos que* $\vec{f}(x,y)$ *é um vetor unitário. Além disso, temos que se* $\vec{r} = (x,y)$ *é o vetor posição do ponto* (x,y) *então, segue que* $\vec{r}.\vec{f}(x,y) = \vec{0}$*, ou seja,* $\vec{f}(x,y)$ *é perpendicular ao vetor posição* $\vec{r}(x,y) = (x,y)$*.*

Logo, $\vec{f}(x,y)$ *é perpendicular a circunferência de centro na origem e raio* $|\vec{r}|$*. Assim, na Figura 3.4 temos uma representação deste campo vetorial. Este campo é chamado de Campo de Velocidade num Movimento Circular.*

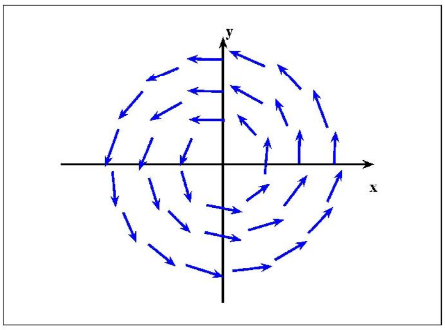

Figura 3.4: Representação gráfico do campo vetorial dado pela função vetorial $\vec{f}(x,y) = \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{i} + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{j}$.

Exemplo 3.1.9 *Considere o campo vetorial definido por*

$$\vec{f}(x,y,z) = -k\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3},$$

onde $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$ *é o vetor posição e* k *é uma constante positiva. Este campo é chamado de Campo Radial de Quadrado Inverso.*

O campo vetorial definido por $\vec{f}$ é usado para descrever a força gravitacional de uma partícula de massa M, situada na origem, sobre outra partícula de massa m situada no ponto $P = (x, y, z)$. Observe que $\vec{f}(x, y, z)$ não está definida na origem; além disso, $|\vec{f}(x, y, z)| = k\dfrac{|\vec{r}|}{|\vec{r}|^3} = k\dfrac{1}{|\vec{r}|^2}$, ou seja, o módulo do vetor $\vec{f}(x, y, z)$ é inversamente proporcional ao quadrado da distância do ponto P a origem.

Por fim, temos que $\vec{f}(x, y, z)$ é um múltiplo escalar negativo do vetor posição $\vec{r}$ e, por isto, ele tem a mesma direção do vetor posição mas tem o sentido contrário. Então, na Figura 3.5 temos uma representação deste campo.

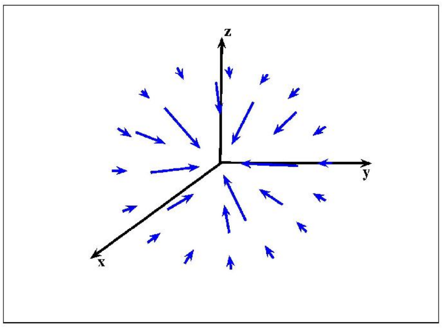

Figura 3.5: Representação do campo vetorial $\vec{f}(x, y, z) = -k\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$.

Existem vários outros exemplos de campos vetoriais no mundo real. Por exemplo, o campo de velocidade de um fluido em movimento; um campo de força eletrostática originário de duas cargas de sinais opostos; o campo de velocidade de um volante no MCU; o campo de velocidade de um redemoinho; etc.

Vamos a alguns exercícios.......

3.2 Exercícios

Exercício 3.2.1 *Represente graficamente os campos vetoriais abaixo.*

1. $\vec{f}(x, y) = (-x, -y)$;
2. $\vec{f}(x, y, z) = (x, y, z)$;
3. $\vec{f}(x, y) = (-y, x)$;
4. $\vec{g}(x, y) = 2\vec{i}$;
5. $\vec{g}(x, y) = 2\vec{i} + \vec{j}$;
6. $\vec{g}(x, y, z) = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

7. $\vec{g}(x, y) = \left(x, \dfrac{y}{2}\right)$;

8. $\vec{f}(x, y) = \vec{i} + x\vec{j}$;

9. $\vec{f}(x, y) = (-x, y)$;

10. $\vec{g}(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

Exercício 3.2.2 *Um tanque tem a forma de um paralelepípedo retângulo, cuja base tem dimensões* $1m$ *e* $2m$ *e cuja altura é* $1,5m$. *O tanque está cheio de uma substância líquida com densidade variável. Em cada ponto a densidade é proporcional à distância do ponto até a superfície superior do tanque. Determine uma função que represente ao campo de densidade e determine as superfícies onde a densidade é constante.*

Exercício 3.2.3 *A temperatura nos pontos de um sólido esférico é dado pelo quadrado da distância do ponto até o centro da esfera. Usando coordenadas cartesianas, determine o campo de temperatura.*

Exercício 3.2.4 *Seja* P_0 *um ponto fixo no espaço e seja* $d(P, P_0)$ *a distância de um ponto qualquer de* P *a* P_0. *Se* P_0 *tem coordenadas cartesianas* (x_0, y_0, z_0) *e* $P = (x, y, z)$, *descreva analiticamente esse campo.*

Exercício 3.2.5 *O campo* $\vec{f}(x, y) = (y, -x)$ *representa a velocidade de um volante em rotação rígida, em torno do eixo* z. *Descrever graficamente o campo.*