1.11 Outras Parametrizações

o estudo de curvas é muito rico e muito amplo. Existem várias curvas cuja parametrização é conhecida, como por exemplo, as que ja vimos (circunferência, elipse, etc.) e outras menos conhecidas (Folium de Descartes, Lemmiscata de Bernoulli, etc.).

Não vamos estudar um grande número de curvas, pois este não é o objetivo do curso, mas vamos estudar mais algumas. A seguir, vamos parametrizar a *Hélice Circular*, que já vimos que é uma curva reversa, esta curva se desenvolve sobre uma superfície cilíndrica.

Considere parte de uma superfície cilíndrica $x^2+y^2 = a^2$. Enrole em volta da superfície um triângulo retângulo flexível $\triangle ABC$ de modo que $A = (a, 0, 0)$ e que $\overline{AB}$ seja o cateto que está no plano XY. A hipotenusa $\overline{AC}$, determina sobre a superfície cilíndrica a Hélice Circular, veja na Figura 1.21.

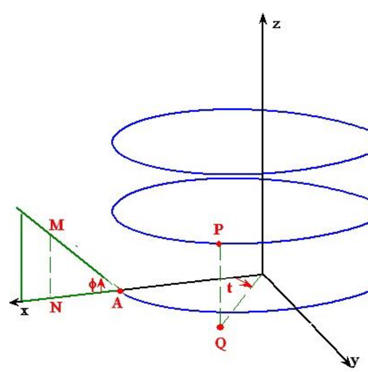

Figura 1.21: Esboço da construção da hélice circular.

Para parametrizar a hélice circular, considere um ponto $P = (x(t), y(t), z(t))$ da hélice, cuja projeção no plano XY seja Q. O ponto P é correspondente ao ponto M no triângulo ABC. A projeção de M no eixo x é N. Além disso, $\overline{PQ} = \overline{MN}$ e $\overline{AN} = \widehat{AQ} = at$. Assim,

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = a\text{sen}(t) \\ z(t) = at.\text{tg}(\phi) \end{cases},$$

onde ϕ é o ângulo agudo $B\hat{A}C$. Portanto, tomando $tg(\phi) = m$, uma equação vetorial para a hélice circular fica dada por

$$\vec{r}(t) = (a\cos(t), a\text{sen}(t), amt).$$

Vamos falar agora de outra curva, a *Cicloide*, que é uma das *Rosáceas*. Uma cicloide pode ser descrita pelo movimento do ponto $P = (0, 0)$ de um círculo de raio a, centrado no ponto $C = (0, a)$ quando o círculo gira sobre o eixo das abscissas, como visto na Figura 1.22.

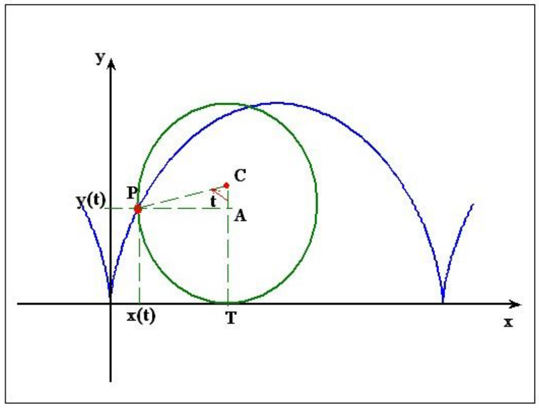

Figura 1.22: Esboço da figura de uma cicloide.

Quando o círculo gira um ângulo t, seu centro se move um comprimento $\overline{OT}$. Na Figura 1.22 temos que $\overline{OT} = \widehat{TP} = at$, $\overline{CT} = a$, $\overline{CA} = acos(t)$ e $\overline{AP} = asen(t)$. Portanto, as coordenadas de P são:

$$x(t) = \overline{OT} - \overline{AP} = a(t - \operatorname{sen}(t)) \; e$$
$$y(t) = \overline{AT} = \overline{CT} - \overline{AC} = a(1 - \cos(t)).$$

Logo, uma equação vetorial para o cicloide é:

$$\vec{r}(t) = (a(t - \operatorname{sen}(t)), a(1 - \cos(t))).$$

Exemplo 1.11.1 *Escreva a equação vetorial de uma curva descrita pelo movimento de uma cabeça de prego num pneu de carro que se move em linha reta, se o raio do pneu é* $25cm$.

SOLUÇÃO: *Supondo que a cabeça do prego se encontra localizada no pneu num ponto P, como na Figura 1.22, sua trajetória é uma cicloide. Então:*

$$\vec{r}(t) = (25(t - sen(t)), 25(1 - \cos(t))).$$

De uma maneira geral, quando temos uma equação cartesiana de uma curva, podemos definir que uma das variáveis é o nosso parâmetro e encontrar as outras coordenadas em função desta, como veremos a seguir.

Exemplo 1.11.2 *Escreva uma equação vetorial para $y = 5x + 3$, no plano $z = 2$.*

SOLUÇÃO: *Tomando $x(t) = t$, temos que $y(t) = 5t + 3$ e $z(t) = 2$. Logo, uma equação vetorial para a curva fica dada por:*

$$\vec{r}(t) = (t, 5t + 3, 2).$$

É importante ressaltar que uma parametrização de uma curva não é única. Por exemplo, para o Exemplo 1.11.2, tomando $x(t) = 2t + 1$, então $y(t) = 10t + 8$ e $z(t) = 2$ e, por isto, a curva fica dada por:

$$\vec{r}(t) = (2t + 1, 10t + 8, 2).$$

Vamos a mais exemplos.

Exemplo 1.11.3 *A intersecção entre as superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 + y$ determina uma curva. Escreva uma equação vetorial desta curva.*
SOLUÇÃO: *Como $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 + y$, segue que $x^2 + y^2 = 2 + y$, ou seja, a equação que representa a intersecção das duas superfícies é dada por $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$. Em outras palavras, a curva que está na intersecção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 + y$ é uma circunferência de raio $\frac{3}{2}$ e centro $C = \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Assim,*

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{3}{2}\cos(t) \\ y(t) &= \frac{3}{2}sen(t) + \frac{1}{2} \\ z(t) = 2 + y &= \frac{5}{2} + \frac{3}{2}sen(t) \end{aligned}$$

com $t \in [0, 2\pi]$. Portanto, uma equação vetorial para a curva é dada por

$$\left(\frac{3}{2}\cos(t), \frac{3}{2}sen(t) + \frac{1}{2}, \frac{5}{2} + \frac{3}{2}sen(t)\right), \ t \in [0, 2\pi].$$

Exemplo 1.11.4 *Encontre uma representação paramétrica para curva dada pela intersecção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$.*
SOLUÇÃO: *Temos que $x = 2 - y$. Assim, substituindo na segunda equação chegamos a*

$$(2 - y)^2 + y^2 + z^2 = 2(2 - y + y) \Rightarrow 4 - 4y + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(y^2 - 2y + 1) + 2 + z^2 = 4 \Rightarrow 2(y - 1)^2 + z^2 = 2,$$

Desta forma, temos que a equação da curva dada pela intersecção das superfícies equivale a $z^2 + 2(y - 1)^2 = 2$, ou seja, a curva de intersecção é a elipse $(y - 1)^2 + \frac{z^2}{2} = 1$. Assim, uma equação vetorial para a curva é dada por:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + \cos(t) \\ z(t) &= \sqrt{2}sen(t) \\ x(t) = 2 - y &= 1 - \cos(t). \end{aligned}$$

1.12 Exercícios

Exercício 1.12.1 *Obtenha a equação cartesiana das seguintes curvas:*

1. $\vec{r}(t) = (\frac{1}{2}t, 3t + 5)$;
2. $\vec{r}(t) = (t - 1, t^2 - 2t + 2)$;
3. $\vec{r}(s) = (s^2 - 1, s^2 + 1, 2)$.

Exercício 1.12.2 *Encontre uma parametrização para cada uma das curvas a seguir.*

1. $y^2 - 4y + 2x = 0$;
2. $y = 2x - 5$;
3. $x^2 = y^4$;
4. $x = z$ *e* $y = 2$;
5. $x^2 + y^2 + z^2 = 3(x + y)$ *e* $x + y = 3$;
6. $2x - 3 = 4y - 7$ *e* $2z - 5y = 12$;
7. $z = x^2 + 2y^2$ *e* $2x - 4y = 6$;

Exercício 1.12.3 *Faça um esboço do conjunto imagem de cada uma das funções vetoriais a seguir.*

1. $\vec{f}(t) = \vec{i} + t\vec{j}$;
2. $\vec{f}(t) = (3t - 6)\vec{i} + (2t - 4)\vec{j}$;
3. $\vec{f}(t) = (t^3, t)$;
4. $\vec{f}(t) = (t, \cos(t))$;
5. $\vec{f}(t) = \vec{i} + \vec{j} + t\vec{k}$;
6. $\vec{f}(t) = (t, t, 1)$, *com* $t \geq 0$;