1.9 Curvas

Agora, vamos definir formalmente o que chamamos de Curva.

Definição 1.9.1 *Considere um intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Chamamos de Curva $c \subset \mathbb{R}^n$, definida em I a uma função $c : I \to \mathbb{R}^n$.*

Em outras palavras, a Definição 1.9.1 diz que dada uma função vetorial contínua $\vec{f}(t) = (f_1(t), \cdots, f_n(t))$ com $t \in I$, uma curva é o lugar geométrico dos pontos $P \in \mathbb{R}^n$ que tem valor posição $\vec{f}(t)$, com $t \in I$. Ainda, sobre a Definição 1.9.1 podemos observar que uma curva é a imagem de uma função vetorial e, por isto, a representação geométrica da curva é o desenho do conjunto imagem da função.

Quando estivermos no espaço euclidiano, uma curva é dada por uma equação vetorial da forma $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ e sua representação gráfica será no espaço euclidiano, como veremos na Figura 1.4.

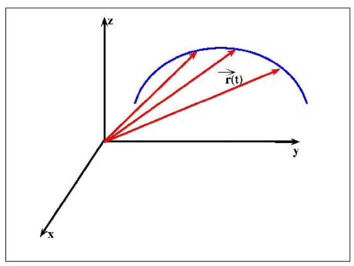

Figura 1.4: Representação de uma curva no Espaço

Uma aplicação óbvia pode ser vista com o movimento de corpos. Por exemplo, se $\vec{f}(t)$ é o vetor posição de uma partícula em movimento, então a curva C coincide com a trajetória da partícula.

Agora, vamos definir formalmente Curvas Parametrizadas.

Definição 1.9.2 *Sejam*

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) = f_1(t) \\ x_2 = x_2(t) = f_2(t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t) = f_n(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

funções contínuas de uma variável t, definidas para $t \in [a, b]$. Então, as Equações em (1.1) são chamadas de Equações Paramétricas de uma Curva e t é chamado de Parâmetro.

Com as equações paramétricas de uma curva, é possível obter uma equação vetorial para a mesma, basta considerar o vetor posição $\vec{f}(t)$ de cada ponto da curva, como visto na Figura 1.5

As componentes de $\vec{f}(t)$ em cada tempo $t \in I$ são as coordenadas do ponto. Portanto, $\vec{f}(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$.

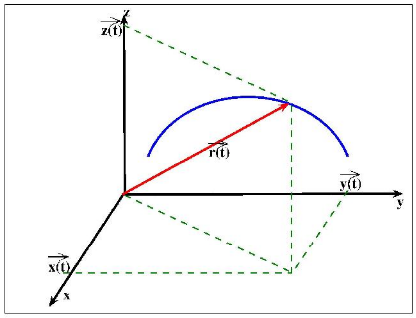

Figura 1.5: Representação paramétrica de uma curva

Exemplo 1.9.1 *A equação vetorial $\vec{r}(t) = (t, t, t)$ representa uma **Reta** cujas equações paramétricas são*

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \\ z(t) = t \end{cases}.$$

Um esboço desta curva é dado pela Figura 1.6.

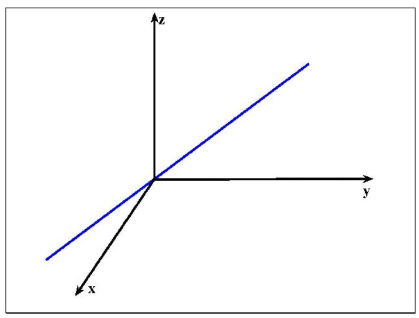

Figura 1.6: Representação gráfica da reta $\vec{r}(t) = (t, t, t)$.

Exemplo 1.9.2 *As equações paramétricas*

$$\begin{cases} x(t) = 2cos(t) \\ y(t) = 2sen(t) \\ z(t) = 3t \end{cases}.$$

*representa uma **Hélice Circular**. Sua equação vetorial é*

$$\vec{r}(t) = (2cos(t), 2sen(t), 3t).$$

Um esboço desta curva é dada pela Figura 1.7.

Exemplo 1.9.3 *A equação vetorial $\vec{r}(t) = (t, t^2, 3)$ representa uma **parábola**, pois $y = x^2$ e $z = 3$. Suas equações paramétricas são*

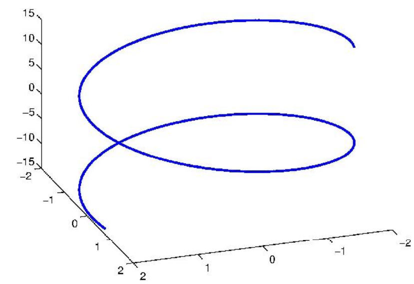

Figura 1.7: Representação gráfica da hélice circular $\vec{r}(t) = (2cos(t), 2sen(t), 3t)$.

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = 3 \end{cases}.$$

Um esboço desta curva é dado pela Figura 1.8.

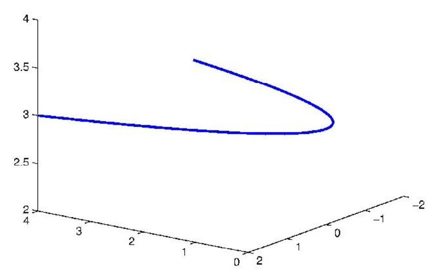

Figura 1.8: Representação gráfica da parábola $\vec{r}(t) = (t, t^2, 3)$.

Já estudamos algumas curvas no curdo de Cálculo, como por exemplo, as senoides, tangentoides, etc. Aqui, vamos rever a curva arco-tangente.

Exemplo 1.9.4 *Seja $c : (t, arctg(t))$, com $t \in \mathbb{R}$. Determine a imagem de c e determine outra curva r tal que $Im_c = Im_r$.*

Solução: *Temos que se $x = t$, então $y = arctg(x)$, isto é, a curva c é a curva arco-tangente. Desta forma, a imagem de c fica dada pela Figura 1.9.*

Uma curva r tal que $Im_c = Im_r$ pode ser obtida por $c : (t^n, arctg(t^n))$, com $n \in \mathbb{Z}$ sendo um número ímpar.

Agora vamos apresentar outras definições úteis sobre curvas, começaremos definindo a diferença entre uma curva que pode ser representada num plano das demais.

Definição 1.9.3 *Uma Curva Plana é uma curva cuja imagem pode ser representada totalmente num plano do espaço. Uma curva que não é plana é chamada de Curva Reversa.*

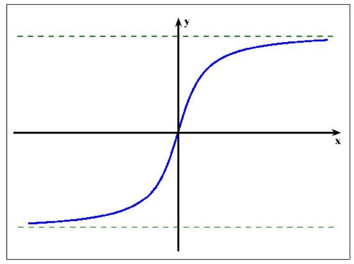

Figura 1.9: Representação gráfica da função $c : (t, \text{arctg}(t))$.

Conhecemos muitas curvas, sendo que quase todas são planas. Vejam alguns exemplos.

Exemplo 1.9.5 *1. A parábola, a hipérbole e a circunferência são alguns exemplos de curvas planas;*

2. A hélice circular é uma curva reversa.

Podemos ter ainda curvas fechadas ou abertas e curvas simples ou com alto intersecção. Vejam a próxima definição.

Definição 1.9.4 *Uma curva parametrizada $\vec{r}(t)$, com $t \in [a, b]$, é dita ser uma Curva Fechada se $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$, caso contrário ela é chamada de Curva Aberta.*

Uma curva parametrizada $\vec{r}(t)$, com $t \in [a, b]$, é dita ser uma Curva Simples se $\vec{r}(t_1) \neq \vec{r}(t_2)$ para todo $t_1, t_2 \in]a, b[$. Caso contrário dizemos que a curva é Não-Simples ou que a curva tem Alto-Intersecção.

Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 1.9.6 *Na Figura 1.10 as figuras (a), (b), (d) e (e) representam figuras fechadas e, as curvas (e) e (f) representam curvas que não são simples.*

Agora, vamos falar do Comprimento da curva. a ideia que utilizaremos é aproximar a medida de cada arco por segmentos de reta, obtendo assim, uma maneira de calcular a medida do comprimento da curva.

Considere uma curva $c : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ diferenciável cuja representação gráfica é dada pela Figura 1.11. Considere também uma partição $P = a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ para o intervalo I.

Desta forma, podemos tomar os segmentos de retas que ligam os pontos t_{i-1} a t_i, sendo que a medida deste comprimento é uma aproximação para a medida do comprimento da curva de t_{i-1} a t_i. Assim, temos que $||\overline{t_{i-1}t_i}||$ é uma aproximação para a medida de $||\widehat{t_{i-1}t_i}||$.

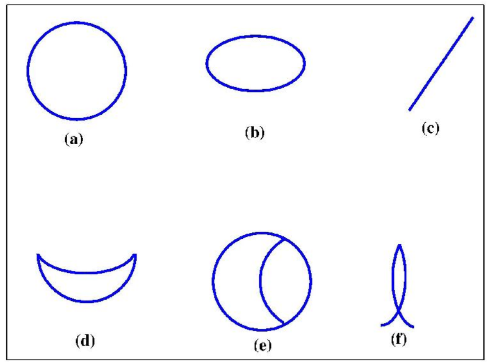

Figura 1.10: Representação da curvas simples (ou não) e de curvas fechadas ou abertas.

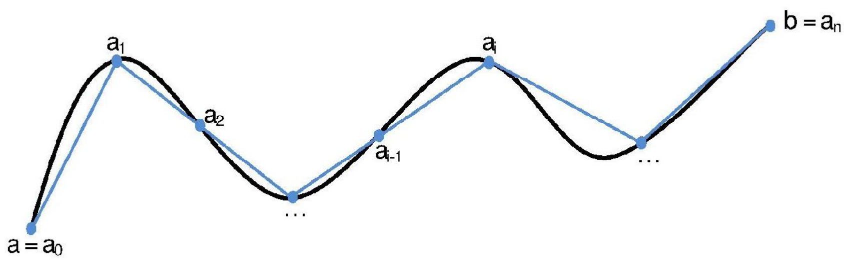

Figura 1.11: Representação gráfica de uma curva c.

Fazendo uma soma desta aproximação para todos os intervalos obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} ||\overline{t_{i-1}t_i}||,$$

que é uma Soma de Riemann para a medida do comprimento da curva c de a até b. Como a curva é diferenciável, pelo Teorema do Valor médio, temos que $||\overline{t_{i-1}t_i}|| = ||c'(\varsigma_i)||\Delta_i$, onde $\varsigma_i \in [t_{i-1}, t_i]$ e $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$. Desta forma, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} ||\overline{t_{i-1}t_i}|| = \sum_{i=1}^{n} ||c'(\varsigma_i)||\Delta_i.$$

Assim, quando o limite desta soma de Riemann existe, ele é uma integral definida e, por isto, ele é chamado de *Comprimento da Curva c*, como visto a seguir.

Definição 1.9.5 *Seja $c : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva com derivada contínua em I. Definimos o Comprimento $L(c)$ da curva em I por*

$$L(c) = \int_a^b ||c'(t)||dt.$$

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.9.7 *Calcule o comprimento das curvas a seguir, no intervalo indicado.*

1. $c : (\cos(t), sen(t), t)$, *com* $t \in [0, 2\pi]$;
2. $c : (t, t^2, 2)$, *com* $t \in [-2, 2]$;

Solução: *(1) Temos que* $c(t) = (\cos(t), sen(t), t)$. *Assim, temos que*

$$c'(t) = (-sen(t), \cos(t), 1)$$

e, consequentemente,

$$||c'(t)|| = \sqrt{sen^2(t) + \cos^2(t) + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Portanto,

$$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}dt = \sqrt{2}t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{2}\ u.c.$$

Para (2), como

$$c(t) = (t, t^2, 2),$$

Segue que

$$c'(t) = (1, 2t, 0) \Rightarrow ||c'(t)|| = \sqrt{1 + 4t^2}.$$

Desta forma, temos que

$$L(c) = \int_{-2}^{2} \sqrt{1+4t^2}dt = 2\int_{-2}^{2} \sqrt{\frac{1}{4} + t^2}dt =$$

$$= 2\left(\frac{t}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+t^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}\ln\left(\left|t + \sqrt{\frac{1}{4}+t^2}\right|\right)\right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= \left(\frac{t}{2}\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\ln\left(\left|\frac{2t+\sqrt{1+4t^2}}{2}\right|\right)\right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= \left(\sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{4+\sqrt{17}}{2}\right)\right) - \left(-\sqrt{17} + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{-4+\sqrt{17}}{2}\right)\right) =$$

$$= 2\sqrt{17} + \frac{1}{4}\left(\ln\left(\frac{4+\sqrt{17}}{2}\right) - \ln\left(\frac{-4+\sqrt{17}}{2}\right)\right) = 2\sqrt{17} + \frac{1}{2}\ln(4+\sqrt{17}).$$

Algumas curvas tem parametrizações conhecidas e/ou de fácil construção e, por isto, é preciso saber fazer estas parametrizações. A primeira curva que vamos construir a parametrização é a reta.

Parametrização da Reta

Da Geometria Analítica temos que uma equação vetorial para uma determinada reta é dada por
$$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{b}t,$$
onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores constantes, t é um parâmetro real. Supondo que $A(a_1, a_2, a_3)$ são as coordenadas do vetor $\vec{a}$ e $B(b_1, b_2, b_3)$ coincide com as coordenadas do vetor $\vec{b}$, então temos que

$$\vec{r}(t) = (a_1 + b_1 t, a_2 + b_2 t, a_3 + b_3 t).$$

Desta forma, as equações paramétricas da reta que passa por $A(a_1, a_2, a_3)$ e tem direção dada por $B(b_1, b_2, b_3)$ são

$$\begin{cases} x(t) = a_1 + b_1 t \\ y(t) = a_2 + b_2 t, \;\; t \in \mathbb{R} \\ z(t) = a_3 + b_3 t \end{cases}.$$

Lembre-se que retas já foi estudado em Geometria Analítica, desta forma, só estamos relembrando tal assunto. Agora, vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.9.8 *Encontre uma representação paramétrica da reta que passa pelo ponto $A = (2, 1, -1)$, na direção do vetor $\vec{b} = (2, -3, 1)$.*
SOLUÇÃO: *Temos que uma equação vetorial da reta é dada por*

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + \vec{b}t = (2 + 2t, 1 - 3t, -1 + t).$$

Desta forma, uma representação paramétrica de $\vec{r}$ é dada por

$$\begin{cases} x(t) = 2 + 2t \\ y(t) = 1 - 3t, \;\; t \in \mathbb{R} \\ z(t) = -1 + t \end{cases}.$$

Um esboço do gráfico de $\vec{r}(t)$ é dado pela Figura 1.12.

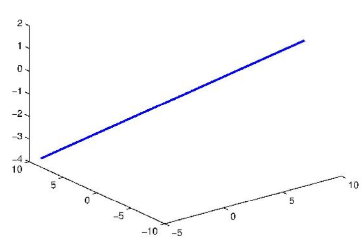

Figura 1.12: Esboço da curva $\vec{r}(t) = (2 + 2t)\vec{i} + (1 - 3t)\vec{j} + (-1 + t)\vec{k}$.

Exemplo 1.9.9 *Determine uma representação paramétrica da reta que passa pelos pontos $A = (2, 0, 1)$ e $B = \left(-1, \dfrac{1}{2}, 0\right)$.*

SOLUÇÃO: *Temos que um vetor diretor da reta é dado por* $\vec{b} = \vec{AB} = B - A = \left(-3, \dfrac{1}{2}, -1\right)$. *Desta forma, temos que* $\vec{r}(t) = \left(2 - 3t, \dfrac{1}{2}t, 1 - t\right)$ *é uma representação vetorial da reta e, consequentemente, uma representação paramétrica da reta é dada por*

$$\begin{cases} x(t) = 2 - 3t \\ y(t) = \dfrac{1}{2}t \\ z(t) = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \ .$$

Um esboço do gráfico de $\vec{r}(t)$ *é dado pela Figura 1.13.*

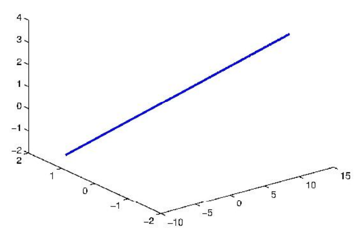

Figura 1.13: Esboço da curva $\vec{r}(t) = \left(2 - 3t, \dfrac{1}{2}t, 1 - t\right)$.

Parametrização de uma Circunferência

Seja c uma circunferência de raio a e centro na origem, contida no plano XY. Considere $0 \leq t \leq 2\pi$, o ângulo formado pelo semi-eixo positivo X e o vetor posição de cada ponto da curva, como visto na Figura 1.14.

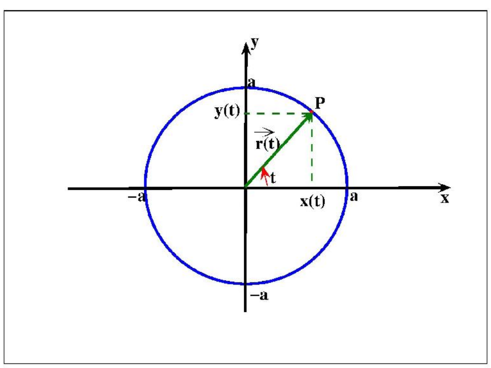

Figura 1.14: Esboço da circunferência de centro na origem e raio a.

Veja que do triângulo ΔOPA temos que

$$\begin{cases} x(t) = acos(t) \\ y(t) = asen(t) \\ z(t) = 0 \end{cases} .$$

Portanto, uma equação vetorial para a circunferência é dada por

$$\vec{r}(t) = (acos(t), asen(t), 0), \ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Agora, suponha que a circunferência não esteja na origem, ou seja, que o seu centro esteja num ponto $C = (x_0, y_0, 0)$, como visto na Figura 1.15.

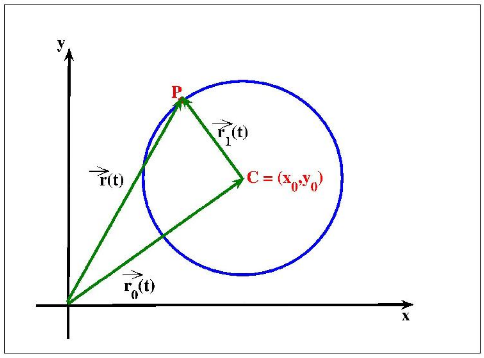

Figura 1.15: Esboço da circunferência de centro $C = (x_0, y_0, 0)$ e raio a.

Como o vetor posição $\vec{r}$é dado por $\vec{r}(t) = \vec{r}_0(t) + \vec{r}_1(t)$, com $\vec{r}_0(t) = (x_0, y_0, 0)$ e $\vec{r}_1(t) = (a\cos(t), a\text{sen}(t), 0)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, segue que uma equação vetorial para a circunferência fica dada por

$$\vec{r}(t) = (x_0 + a\cos(t), y_0 + a\text{sen}(t), 0), \ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Aqui consideramos que a circunferência estava no plano XY e, consequentemente, a variável z fica constante e igual a zero o tempo todo. Poderíamos tomar a variável $z = cte$ para qualquer constante, visto que a circunferência é uma curva plana, como veremos na observação a seguir.

Observação 1.9.1 *Como a circunferência é uma curva plana, podemos usar apenas duas funções coordenadas para representá-la. Além disso, a terceira função coordenada pode assumir qualquer valor constante. Temos também que a construção é análoga, quando a circunferência está no plano XZ ou no plano YZ, isto é,*

$$\vec{r}(t) = (x_0 + a\cos(t), 0, z_0 + asen(t)), \ 0 \leq t \leq 2\pi \ (plano\ XZ) \ e$$

$$\vec{r}(t) = (0, y_0 + a\cos(t), z_0 + asen(t)), \ 0 \leq t \leq 2\pi \ (plano\ YZ).$$

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.9.10 *Obtenha uma equação vetorial para a circunferência $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$, no plano $z = 3$.*

SOLUÇÃO: *Temos que $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 - 9 + y^2 - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 9 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-2)^2 = 3^2$. Então, esta circunferência tem raio 3, centro $(3, 2, 3)$ e está contida no plano $z = 3$. Logo,*

$$\begin{cases} x(t) = 3 + 3\cos(t) \\ y(t) = 2 + 3sen(t), \;\; 0 \leq t \leq \;. \\ z(t) = 3 \end{cases}$$

Portanto, uma equação vetorial para a circunferência é dada por

$$\vec{r}(t) = (3 + 3\cos(t), 2 + 3sen(t), 3), \;\; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Um esboço desta circunferência é dado pela Figura 1.16.

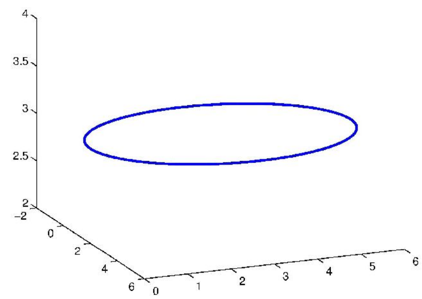

Figura 1.16: Esboço da circunferência de centro $C = (3, 2, 3)$ e raio 3.

Exemplo 1.9.11 *A equação vetorial* $\vec{r}(t) = (2, 3\cos(t), 3sen(t))$ *representa uma circunferência. Determine a correspondente equação cartesiana desta circunferência.*

SOLUÇÃO: *Temos que a circunferência tem raio* 3 *e está contida no plano* $x = 2$. *Ainda,*

$$\begin{cases} x(t) = 2 \\ y(t) = 3\cos(t) \;. \\ z(t) = 3sen(t) \end{cases}$$

Então, $y^2 + z^2 = 9\cos^2(t) + 9sen^2(t) = 9(\cos^2(t) + sen^2(t)) = 9$. *Portanto, a circunferência fica dada por*

$$y^2 + z^2 = 9, \;\; x = 2.$$

Um esboço desta circunferência é dado pela Figura 1.17.

Parametrização da Elipse

Considere a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (com $a > b$), e considere um ponto $P = (x(t), y(t))$ da curva. Trace um arco de circunferência de raio a e outro de raio b, ambos centrados na origem. Marque sobre estes arcos os pontos A, de abscissa x, na circunferência de raio a, e B, de ordenada y, na outra.

É possível provar que os pontos A, B, O estão alinhados, isto é, estão sobre a mesma reta. O parâmetro t representa o ângulo que essa reta faz com o semi-eixo positivo x. Veja a Figura 1.18.

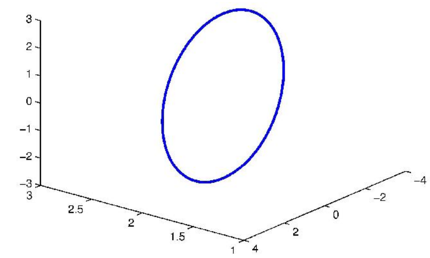

Figura 1.17: Representação gráfica da circunferência $y^2 + z^2 = 9,\ x = 2$.

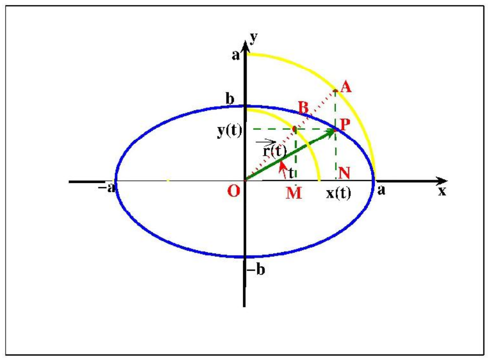

Figura 1.18: Esboço da elipse com $a > b$ centralizada na origem.

Do triângulo retângulo ΔONA, obtemos que $x(t) = a\cos(t)$ e do triângulo ΔOMB obtemos que $y(t) = b\text{sen}(t)$. Então, uma equação vetorial da elipse no plano XY é dada por

$$\vec{r}(t) = (a\cos(t), b\text{sen}(t), 0),\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Agora, considere uma elipse centrada no ponto $(x_0, y_0, 0)$ com eixos paralelos aos eixos coordenados, conforme a Figura 1.19.

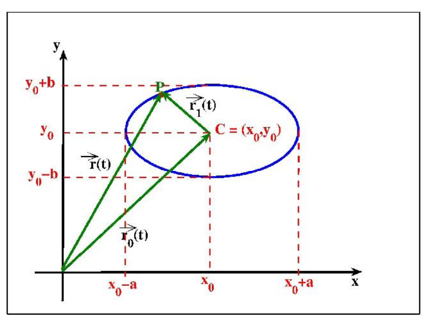

Figura 1.19: Esboço da elipse com $a > b$ centrada no ponto $(x_0, y_0, 0)$ com eixos paralelos aos eixos coordenados.

Logo, uma equação vetorial é dada por

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{r}_1(t),$$

e, portanto,

$$\vec{r}(t) = (x_0 + a\cos(t), y_0 + b\text{sen}(t), 0),\ \ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Da mesma forma que a circunferência temos que a elipse é uma curva plana, sendo necessária apenas duas funções coordenada para a representá-la. As adaptações para as elipses nos planos XZ e YZ também são feitas de maneira análoga a circunferência. Vamos aos exemplos.

Exemplo 1.9.12 *Escreva uma equação vetorial para a elipse dada pela equação cartesiana $9x^2 + 4y^2 = 36$, no plano XY.*

SOLUÇÃO: *Temos que $9x^2 + 4y^2 = 36 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Assim, uma equação vetorial para a elipse é dada por*

$$\vec{r}(t) = (2\cos(t), 3sen(t), 0),\ \ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Exemplo 1.9.13 *Encontre uma equação vetorial para a elipse dada pela Figura 1.20*

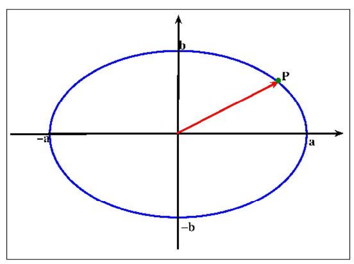

Figura 1.20: Esboço da elipse do Exemplo 1.9.13.

SOLUÇÃO: *A equação da elipse é dada por $\dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{(y-1)^2}{4} = 1$. Assim, as suas equações paramétricas são dadas por $x(t) = 2 + 3\cos(t)$, $y(t) = 1 + 2sen(t)$ e $z(t) = 0$. Portanto, uma equação vetorial para a elipse é dada por*

$$\vec{r}(t) = (2 + 3\cos(t), 1 + 2sen(t), 0),\ \ 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Vamos aos exercícios.

1.10 Exercícios

Exercício 1.10.1 *Encontre uma equação vetorial para cada uma das seguintes curvas.*

1. $x^2 + y^2 = 4,\ \ z = 4$;

2. $y = 2x^2, \ z = x^3$;
3. $2(x+1)^2 + y^2 = 10, \ z = 2$;
4. $y = x^{1/2}, \ z = 2$;
5. $x = e^y, \ z = e^x$;
6. $y = x, \ z = x^2 + y^2$;
7. *O segmento de reta de* $A = (2,1,2)$ *a* $B = (-1,1,3)$;
8. *O segmento de reta de* $C = (0,0,1)$ *a* $D = (1,0,0)$;
9. *A parábola* $y = \pm\sqrt{x}, \ 0 \leq x \leq 1$;
10. *O segmento de reta de* $A = (1,-2,3)$ *a* $B = (-1,0,1)$;
11. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$;
12. $4x^2 + 9y^2 - 4x + 6y - 14 = 0$.

Exercício 1.10.2 *Encontre uma equação vetorial para cada uma das retas a seguir.*

1. $y = 5x - 1, \ z = 2$;
2. $2x - 5y + 4z = 1, \ 3x - 2y - 5z = 1$;
3. $2x - 5y + z = 4, \ y - x = 4$.

Exercício 1.10.3 *Determine o centro e o raio das seguintes circunferências e depois escreva uma equação vetorial para cada uma delas.*

1. $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 3 = 0$;
2. $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$;
3. $x^2 + y^2 + 5y - 2 = 0$.

Exercício 1.10.4 *Calcule o comprimento de cada uma das curvas a seguir no intervalo indicado.*

1. $c(t) = \left(\frac{t^2}{2}, \frac{t^2}{2} - t\right)$ *com* $0 \leq t \leq 1$;
2. $c(t) = \left(t^2 + 2t, t^2 - 2t\right)$ *com* $0 \leq t \leq 2$;
3. $c(t) = \left(2t^2, 2t^3\right)$ *com* $1 \leq t \leq 2$;
4. $c(t) = \left(3e^{2t}, -4e^{2t}\right)$ *com* $0 \leq t \leq 1$;
5. *a circunferência* $c(t) = (a\cos(t), asen(t))$ *com* $0 \leq t \leq 1$;
6. $c(t) = \left(6t^2, 4\sqrt{2}t^3, 3t^4\right)$ *com* $-1 \leq t \leq 2$.