1.7 A Integral de Funções Vetoriais de uma variável

Até agora a ideia que utilizamos foi estender a definição do item estudado em funções escalares para funções vetoriais. O mesmo vai acontecer com a Integral de Funções Vetoriais de uma variável.

Vamos relembrar a ideia usada na construção de integrais de funções escalares: Considere a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável e considere também $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Chamemos de Δt_i o comprimento do intervalo $I_i = [t_{i-1}, t_i]$. Se $c_i \in I_i$, seque que podemos tomar a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta t_i$$

que é chamada de *Soma de Riemann* de f relativa a partição P. Depois que definimos a soma de Riemann para funções vetoriais, podemos calcular o valor do limite da soma, caso exista. Se exitir tal limite, o chamaremos de *Integral Definida da Função.*

Como o limite de funções vetoriais é limite de cada uma das coordenadas e a soma de funções coordenadas é também definida coordenada a coordenada, podemos substituir a função escalar na integral por uma função vetorial e utilizarmos a mesma ideia para definir a integral de funções vetoriais, como vemos a seguir.

Definição 1.7.1 *Considere $\vec{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ uma função vetorial e considere também $P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Chamamos de Δt_i o comprimento do intervalo $I_i = [t_{i-1}, t_i]$. Se $c_i \in I_i$, seque que*

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{f}(c_i)\Delta t_i$$

é chamada de Soma de Riemann de $\vec{f}$ relativa a partição P.

Definida a soma de Riemann para funções vetoriais, podemos calcular o valor do limite desta soma. Se o mesmo existir, então o chamaremos de *Integral Definida da Função Vetorial*, como a seguir.

Definição 1.7.2 *Dizemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \vec{f}(c_i)\Delta t_i$ é $\vec{F} \in \mathbb{R}^n$ quando $\max \Delta t_i \to 0$ e escrevemos*

$$\lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{f}(c_i)\Delta t_i = \vec{F}$$

se $\forall\ \epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (que só depende de ϵ e não do c_i escolhido) tal que $\left\|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \vec{f}(c_i)\Delta t_i - \vec{F}\right\| < \epsilon$ para toda partição P de $[a, b]$ com $\max \Delta t_i < \delta$.

Quando o valor de $\vec{F}$ existe na Definição 1.7.2 ele é único e, por isto, utilizamos a notação

$$\int_a^b \vec{f}(t)dt = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{f}(c_i)\Delta t_i.$$

Além disso, utilizando as propriedades de somatória e de limite de funções vetoriais, temos que

$$\int_a^b \vec{f}(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \cdots, \int_a^b f_n(t)dt \right),$$

isto é, a integral de uma função vetorial é a integral de cada uma das suas funções coordenadas. consequentemente, as propriedades de integração de funções vetoriais são extensões das propriedades de funções escalares, aplicando coordenada a coordenada. Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.7.1 *Calcule* $\int_a^b \vec{f}(t)dt$ *sendo* $\vec{f}(t) = (t, 4, t^2)$ *e* $[a, b] = [-1, 3]$.

Solução: *Temos que* $f_1(t) = t$, *logo*

$$\int_{-1}^{3} f_1(t)dt = \int_{-1}^{3} tdt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{-1}^{3} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Por outro lado, temos que $f_2(t) = 4$, *logo*

$$\int_{-1}^{3} f_2(t)dt = \int_{-1}^{3} 4dt = 4t|_{-1}^{3} = 12 - (-4) = 16.$$

Por fim, temos que $f_3(t) = t^2$, *logo*

$$\int_{-1}^{3} f_3(t)dt = \int_{-1}^{3} t^2dt = \left.\frac{t^3}{3}\right|_{-1}^{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.$$

Portanto, temos que

$$\int_{-1}^{3} \vec{f}(t)dt = \left(4, 16, \frac{26}{3}\right).$$

Exemplo 1.7.2 *Calcule* $\int_0^1 \vec{f}(t)dt$ *sendo*

$$\vec{f}(t) = \left(3t^4, \frac{1}{t^3}, 5t^{\frac{3}{2}}\right).$$

Solução: *Temos que,* $f_1(t) = 3t^4$*, logo*

$$\int_0^1 f_1(t)dt = \int_0^1 3t^4 dt = \left.\frac{3t^5}{5}\right|_0^1 = \frac{3}{5}.$$

Além disso, temos que $f_2(t) = \frac{1}{t^3} = t^{-3}$*. Logo,*

$$\int_0^1 f_2(t)dt = \int_0^1 t^{-3}dt = \left.\frac{-t^{-2}}{3}\right|_0^1 = \left.\frac{-1}{3t^2}\right|_0^1 = -\frac{1}{3} + \infty = +\infty.$$

Por fim, temos que $f_3(t) = 5t^{\frac{3}{2}}$ *e, consequentemente,*

$$\int_0^1 f_3(t)dt = \int_0^1 5t^{\frac{3}{2}}dt = \left.\frac{5t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right|_0^1 = \left.2t^{\frac{5}{2}}\right|_0^1 = 2.$$

Portanto, temos que

$$\int_0^1 \vec{f}(t)dt = \left(\frac{3}{5}, +\infty, 2\right).$$

Exemplo 1.7.3 *Calcule* $\int\limits_a^b \vec{f}(t)dt$ *sendo* $\vec{f}(t) = \left(t^3(2t^2-3), \dfrac{t^2+4t+4}{\sqrt{t}}\right)$ *e* $[a,b] = [1,2]$.

Solução: *Temos que*

$$\vec{f}(t) = \left(t^3(2t^2-3), \frac{t^2+4t+4}{\sqrt{t}}\right) = \left(2t^5 - 3t^3, t^{\frac{3}{2}} + 4t^{\frac{1}{2}} + 4t^{\frac{-1}{2}}\right).$$

Desta forma, temos que

$$\int_1^2 \vec{f}(t)dt = \int_1^2 \left(2t^5 - 3t^3, t^{\frac{3}{2}} + 4t^{\frac{1}{2}} + 4t^{\frac{-1}{2}}\right)dt =$$

$$= \left.\left(2\frac{t^6}{6} - 3\frac{t^4}{4}, \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + 4\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\right|_1^2 = \left.\left(\frac{t^6}{3} - \frac{3}{4}t^4, \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}} + 8t^{\frac{1}{2}}\right)\right|_1^2 =$$

$$= \left(\left(\frac{64}{3} - \frac{48}{4}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right), \left(\frac{8}{5}\sqrt{2} + \frac{16}{3}\sqrt{2} + 8\sqrt{2}\right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{8}{3} + 8\right)\right) =$$

$$= \left(21 - \frac{47}{4}, \frac{(24+80+120)\sqrt{2}}{15} - \frac{6+40+120}{15}\right) = \left(\frac{37}{4}, \frac{224\sqrt{2} - 166}{15}\right).$$

Agora, vamos aos exercícios.

1.8 Exercícios

Exercício 1.8.1 *Encontre a Integral Indefinida de cada uma das funções vetoriais abaixo.*

a) $\vec{f}(t) = \left(3t^4, 2t^7, \dfrac{1}{t^3}\right)$; **(b)** $\vec{f}(t) = \left(5t^{\frac{3}{2}}, 10\sqrt[3]{t^2}, \left(4cossec(t)cotg(t) + 2sec^2(t)\right)\right)$;

(c) $\vec{f}(t) = \left(6t^2\sqrt[3]{t}, 4t^3 + t^2, t^3(2t^2 - 3)\right)$; **(d)** $\vec{f}(t) = \left(\sqrt{1-4t}, \sqrt[3]{6-2t}, t\sqrt{t^2-9}\right)$.

Exercício 1.8.2 *Calcule o valor de cada uma das integrais abaixo.*

(a) $\displaystyle\int_2^5 \left(4, 6t, t^2\right) dt$; **(b)** $\displaystyle\int_0^3 \left(3t^2 - 4t + 1, (t-3)^3, t^2 - 2t\right) dt$;

(c) $\displaystyle\int_2^{-3} \left(1, \sqrt{t}, \frac{t^2+1}{t^2}\right) dt$; **(d)** $\displaystyle\int_2^4 \left(\sqrt{2t-4}, \frac{t}{(2t^2-5)^3}, 3t\sqrt{16-t^2}\right) dt$;

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(sen(2t), t^2\sqrt{t^3+1}, \frac{t^3+1}{t+1}\right) dt$.

Exercício 1.8.3 *Encontre a derivada de cada uma das funções a seguir.*

(a) $\vec{f}(t) = (\ln(|t^3+1|), \ln(|\cos(3t)|), \ln(|tg(4t) + \sec(4t)|))$;

(b) $\vec{f}(t) = \left(\ln\left(\left|\dfrac{3t}{t^2+4}\right|\right), \ln(|t^2(t^2-1)^3(t+2)^4|), \frac{t}{\ln(t)}\right)$.

Exercício 1.8.4 *Calcule cada uma das integrais a seguir.*

(a) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{3-2t}, \frac{3t}{t^2+4}, \frac{3t^2}{5t^3-1}\right) dt$;

(d) $\displaystyle\int \left(\frac{\cos(t)}{1+2sen(t)}, cotg(5t) + cossec(5t), \frac{2t^3}{t^2-4}, \frac{1}{t\ln(t)}\right)$.

Exercício 1.8.5 *Encontre a derivada de cada uma das funções a seguir.*

(a) $\vec{f}(t) = \left(e^{5t}, e^{t^2-3}, e^x sen(e^t), e^{e^t}\right)$;

(b) $\vec{f}(t) = \left(t^5 e^{-3\ln(t)}, \dfrac{2}{e^t + e^t}, \ln\left(\dfrac{e^{4t}-1}{e^{4t}+1}\right)\right)$.

Exercício 1.8.6 *Calcule as integrais indefinidas:*

(a) $\displaystyle\int \left(e^{2-5t}, \frac{1+e^{2t}}{e^t}, \frac{e^{3t}}{(1-2e^{3t})^2}\right) dt$;

(b) $\displaystyle\int \left(\frac{2t}{t^2-5}, \frac{2t+3}{t+1}, \frac{t}{t\ln^2 t}\right)$;

(c) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{t}, \frac{\ln(|t|)}{t}, te^{4-t^2}\right) dt$;

(d) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{t\ln^2 t}, \frac{e^t}{e^t+2}\right) dt$.