

1.5 A Derivada das Funções Vetoriais de uma Variável

Agora, vamos estender a ideia de Derivadas de Funções Escalares de uma Variável Real para a *Derivada de Funções Vetoriais*. Quando estudamos derivada de funções escalares, tínhamos que

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

quando o limite existia. Das propriedades de limites de funções vetoriais temos que o limite de uma função vetorial é o limite das funções coordenadas. Logo, se trocarmos a função escalar $f(x)$ por uma função vetorial $\vec{f}(x)$, utilizando a mesma definição, obtemos a derivada de uma função vetorial, que vai ser dada pela derivada de cada uma das funções coordenadas. Veja a definição a seguir.

Definição 1.5.1 *Seja $\vec{f} : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função vetorial dada por $\vec{f} = \vec{f}(t)$. A Derivada de \vec{f} em relação a t , denotada por $\frac{d\vec{f}}{dt}$ ou $\vec{f}'(t)$, é definida por:*

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}$$

para todos os valores de $t \in A \subset \mathbb{R}$ tais que o limite exista.

Dos comentários feitos acima, sobre o limite de funções vetoriais, podemos tomar a observação a seguir.

Observação 1.5.1 *Considere uma função vetorial $\vec{a}(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))$ um vetor em \mathbb{R}^n tal que $\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = \vec{a}(t)$. Então, temos que $\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = \vec{a}(t) \Leftrightarrow f'_i(t) = a_i(t), \forall i \in \{1, \dots, n\}$.*

Utilizando a observação anterior podemos resolver alguns exemplos. Lembrese, encontrar a derivada de uma função vetorial é obter a derivada de cada uma das funções coordenadas. Vejamos os exemplos.

Exemplo 1.5.1 *Dada a função vetorial*

$$\vec{f}(t) = (3t^2 + 4t, \ln(2t^2 - 5), \text{sen}(3t^3 + 4t^2 - 1)),$$

obtenha o vetor $\frac{d\vec{f}}{dt}(t)$.

SOLUÇÃO: *Temos que $f_1(t) = 3t^2 + 4t$, logo*

$$f'_1(t) = (3t^2 + 4t)' = 6t + 4.$$

Além disso, $f_2(t) = \ln(2t^2 - 5)$, logo

$$f_2'(t) = (\ln(2t^2 - 5))' = \frac{1}{2t^2 - 5} \cdot (2t^2 - 5)' = \frac{4t}{2t^2 - 5}.$$

Por fim, temos que $f_3(t) = \text{sen}(3t^3 + 4t^2 - 1)$, logo

$$f_3'(t) = (\text{sen}(3t^3 + 4t^2 - 1))' = \cos(3t^3 + 4t^2 - 1) \cdot (3t^3 + 4t^2 - 1)' = (9t^2 + 8t) \cos(3t^3 + 4t^2 - 1).$$

Portanto,

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = \left(6t + 4, \frac{4t}{2t^2 - 5}, (9t^2 + 8t) \cos(3t^3 + 4t^2 - 1) \right).$$

O uso das propriedades para calcular limites e derivadas de funções são muito importantes, pois facilita na obtenção dos resultados. Sendo assim, apresentaremos algumas propriedades relacionadas a operações com funções vetoriais, estas propriedades são obtidas diretamente das propriedades de derivadas de funções escalares e da observação anterior.

Observação 1.5.2 PROPRIEDADES: Considere \vec{f} e \vec{g} duas funções vetoriais e h uma função escalar. Então, são válidas as seguintes propriedades:

1. $\frac{d(\vec{f} \pm \vec{g})(t)}{dt} = \frac{d\vec{f}(t)}{dt} \pm \frac{d\vec{g}(t)}{dt};$
2. $\frac{d(h\vec{f})(t)}{dt} = \left(h \frac{d\vec{f}}{dt} \right) (t) + \left(\frac{dh}{dt} \vec{f} \right) (t);$
3. Se o produto vetorial estiver definido, então temos que:
 $\frac{d(\vec{f} \times \vec{g})(t)}{dt} = \left(\vec{f} \times \frac{d\vec{g}}{dt} \right) (t) + \left(\frac{d\vec{f}}{dt} \times \vec{g} \right) (t);$
4. $\frac{d(\|\vec{f}(t)\|)}{dt} = \frac{\left\langle \vec{f}(t), \frac{d\vec{f}}{dt}(t) \right\rangle}{\|\vec{f}(t)\|}.$

Vamos a mais exemplos.

Exemplo 1.5.2 Encontre o vetor derivada de cada uma das funções vetoriais a seguir.

1. $\vec{f}(t) = \left(3t^2 - \frac{2t - 4}{4t + 3}, \sqrt[3]{2t^2 - 5t + 4}, \ln(|3t^2 - 2t|) \right);$
2. $\vec{f}(t) = \text{sen}(3t^2)\vec{i} - \frac{4}{5t + 3}\vec{j} - e^{5t^2}\vec{k};$
3. $\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}, t^2 - 2t \right).$

SOLUÇÃO: (1) Temos que $f_1(t) = 3t^2 - \frac{2t-4}{4t+3}$. Assim,

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= 6t - \frac{(2t-4)'(4t+3) - (2t-4)(4t+3)'}{(4t+3)^2} = 6t - \frac{8t+6-8t+16}{(4t+3)^2} = \\ &= 6t - \frac{22}{(4t+3)^2}. \end{aligned}$$

Para a segunda função coordenada, temos que $f_2(t) = \sqrt[3]{2t^2 - 5t + 4}$. Desta forma, obtemos

$$\begin{aligned} f_2'(t) &= [(2t^2 - 5t + 4)^{1/3}]' = \frac{1}{3}(2t^2 - 5t + 4)^{-2/3}(2t^2 - 5t + 4)' = \\ &= \frac{4t - 5}{3\sqrt[3]{(2t^2 - 5t + 4)^2}}. \end{aligned}$$

Por fim, para a terceira função coordenada temos que $f_3(t) = \ln(|3t^2 - 2t|)$ e, por isto,

$$f_3'(t) = (\ln(|3t^2 - 2t|))' = \frac{1}{3t^2 - 2t} \cdot (3t^2 - 2t)' = \frac{6t - 2}{3t^2 - 2t}.$$

Portanto,

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = \left(6t - \frac{22}{(4t+3)^2}, \frac{4t-5}{3\sqrt[3]{(2t^2-5t+4)^2}}, \frac{6t-2}{3t^2-2t} \right).$$

(2) Temos que $f_1(t) = \text{sen}(3t^2)$. Logo,

$$f_1'(t) = (\text{sen}(3t^2))' = \cos(3t^2) \cdot (3t^2)' = 6t \cos(3t^2).$$

Além disso, temos que $f_2(t) = -\frac{4}{5t+3} = -4(5t+3)^{-1}$. Assim,

$$f_2'(t) = (-4(5t+3)^{-1})' = -4(-1)(5t+3)^{-2} \cdot (5t+3)' = \frac{20}{(5t+3)^2}.$$

Por fim, temos que $f_3(t) = -e^{5t^2}$. Desta forma,

$$f_3'(t) = (-e^{5t^2})' = -e^{5t^2} \cdot (5t^2)' = -10te^{5t^2}.$$

Portanto,

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = \left(6t \cos(3t^2), \frac{20}{(5t+3)^2}, 10te^{5t^2} \right).$$

(3) Temos que $\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}, t^2 - 2t \right)$. Desta forma,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{f}}{dt}(t) &= \left(\left(\frac{1}{t} \right)', \left(\frac{1}{t^2} \right)', (t^2 - 2t)' \right) = ((t^{-1})', (t^{-2})', 2t - 2) = \\ &= (-1 \cdot t^{-2}, -2 \cdot t^{-3}, 2t - 2) = \left(-\frac{1}{t^2}, -\frac{2}{t^3}, 2t - 2 \right). \end{aligned}$$

Exemplo 1.5.3 Considere a função vetorial $\vec{f}: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ derivável, tal que $\|\vec{f}\| = cte > 0$, para todo $t \in A$. Prove que $\vec{f}(t) \cdot \frac{d\vec{f}(t)}{dt} = 0$, para todo $t \in A$. Interprete geometricamente para o caso $n = 2$.

SOLUÇÃO: Temos que $k = \|\vec{f}(t)\| = \sqrt{\langle \vec{f}(t), \vec{f}(t) \rangle}$, onde k é uma constante. Desta forma, temos que $\langle \vec{f}(t), \vec{f}(t) \rangle = k^2$ e, por isto,

$$\frac{\langle \vec{f}(t), \vec{f}(t) \rangle}{dt} = \frac{d(k^2)}{dt} \Rightarrow \left\langle \vec{f}(t), \frac{d\vec{f}}{dt}(t) \right\rangle + \left\langle \frac{d\vec{f}}{dt}(t), \vec{f}(t) \right\rangle = 0$$

e como o produto escalar é comutativo, segue que

$$2 \left\langle \vec{f}(t), \frac{d\vec{f}}{dt}(t) \right\rangle = 0,$$

isto é,

$$\left\langle \vec{f}(t), \frac{d\vec{f}}{dt}(t) \right\rangle = 0, \forall t \in A.$$

Vamos a uma interpretação geométrica para o caso $n = 2$. Como $\|\vec{f}(t)\|$ é constante, e o gráfico de \vec{f} é o lugar geométrico dos pontos extremos de \vec{f} aplicados a $t \in A$, segue que o gráfico de \vec{f} representa uma circunferência de raio $\|\vec{f}(t)\|$ (uma circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos que estão a uma mesma distancia de um determinado ponto).

Sendo assim, como $\left\langle \vec{f}(t), \frac{d\vec{f}}{dt}(t) \right\rangle = 0, \forall t \in A$, segue que $\frac{d\vec{f}}{dt}(t)$ são todos os vetores tangentes à circunferência. A Figura 1.3 traz uma representação gráfica da interpretação geométrica.

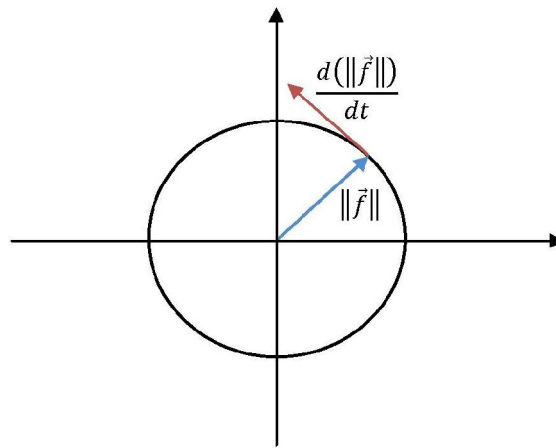


Figura 1.3: Interpretação gráfico do Exemplo 1.5.3 para o caso $n = 2$.

Visto que a derivada de uma função vetorial é a derivada de cada uma das coordenadas e lembrando que a segunda derivada de uma função escalar é a derivada da derivada da função, podemos estender a definição de Derivadas de Ordem Superior para funções vetoriais, como apresentado na observação a seguir.

Observação 1.5.3 *As derivadas de ordem superior são definidas de maneira análoga, isto é,*

$$\frac{d^2 \vec{f}}{df^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{f}}{dt} \right) = \left(\frac{d^2 f_1}{df^2}, \dots, \frac{d^2 f_n}{df^2} \right),$$

$$\frac{d^3 \vec{f}}{df^3} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^2 \vec{f}}{df^2} \right) = \left(\frac{d^3 f_1}{df^3}, \dots, \frac{d^3 f_n}{df^3} \right),$$

e assim por diante.

Exemplo 1.5.4 *Encontre as segunda e a terceira derivada da função vetorial*
 $\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{1+4t^2}, e^{-t}, \cos(2t-4) \right)$.

SOLUÇÃO: *Vamos derivar cada uma das funções coordenadas. Temos que*
 $f_1(t) = \frac{1}{1+4t^2} = (1+4t^2)^{-1}$. *Desta forma,*

$$\begin{aligned} \frac{df_1}{dt}(t) &= [(1+4t^2)^{-1}]' = -1(1+4t^2)^{-2}(1+4t^2)' = -\frac{8t}{(1+4t^2)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^2 f_1}{dt^2}(t) &= \left[-\frac{8t}{(1+4t^2)^2} \right]' = -\frac{(8t)'(1+4t^2)^2 - (8t)((1+4t^2)^2)'}{(1+4t^2)^4} = \\ &= \frac{(1+4t^2)(8(1+4t^2) - 8t \cdot 2 \cdot 8t)}{(1+4t^2)^4} = \frac{8 + 32t^2 - 128t^2}{(1+4t^2)^3} = \frac{8 - 96t^2}{(1+4t^2)^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d^3 f_1}{dt^3}(t) &= \left(-\frac{8 - 96t^2}{(1+4t^2)^3} \right)' = -\frac{(8 - 96t^2)'((1+4t^2)^3) - (8 - 96t^2)((1+4t^2)^3)'}{(1+4t^2)^6} = \\ &= -\frac{-192t(1+4t^2)^3 - 16t(8 - 96t^2)(1+4t^2)^2}{((1+4t^2)^3)^2} = -\frac{-192t - 768t^3 - 128t + 1536t^3}{(1+4t^2)^4} = \\ &= -\frac{768t^3 - 320t}{(1+4t^2)^4}. \end{aligned}$$

Para $f_2(t) = e^{-t}$, temos que $f_2'(t) = -e^{-t}$, $f_2''(t) = e^{-t}$ e $f_2'''(t) = -e^{-t}$.

Por fim, temos para $f_3(t) = \cos(2t-4)$ que $f_3'(t) = -2\text{sen}(2t-4)$, $f_3''(t) = -4\cos(2t-4)$ e $f_3(t) = 8\text{sen}(2t-4)$. Portanto,

$$\frac{d^2 \vec{f}}{dt^2}(t) = \left(-\frac{8 - 96t^2}{(1+4t^2)^3}, e^{-t}, -4\cos(2t-4) \right),$$

$$\frac{d^3 \vec{f}}{dt^3}(t) = \left(-\frac{768t^3 - 320t}{(1+4t^2)^4}, -e^{-t}, 8\text{sen}(2t-4) \right).$$

Exemplo 1.5.5 Suponha que $\|\vec{f}\| \neq 0$ para todo $t \in D_{\vec{f}}$. Considere também a função $\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}\|}$. Prove que

1. \vec{T} e $\frac{d\vec{T}}{dt}$ são ortogonais;

2. $\vec{a} = \|\vec{v}\| \frac{d\vec{T}}{dt} + \frac{d(\|\vec{v}\|)}{dt} \vec{T}$.

SOLUÇÃO: (a) Temos que

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\vec{v}(t)\|} \cdot \vec{v}(t) \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\|\vec{v}(t)\|} \right) \cdot \vec{v}(t) + \frac{1}{\|\vec{v}(t)\|} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{v}(t)) = \\ &= -\frac{\frac{d}{dt} (\|\vec{v}(t)\|) \cdot \vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|^2} + \frac{1}{\|\vec{v}(t)\|} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{v}(t)). \end{aligned}$$

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} \vec{T}(t) \cdot \frac{d\vec{T}(t)}{dt} &= \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|} \cdot \left(-\frac{\frac{d}{dt} (\|\vec{v}(t)\|) \cdot \vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|^2} + \frac{1}{\|\vec{v}(t)\|} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{v}(t)) \right) = \\ &= \frac{1}{\|\vec{v}(t)\|} \left(-\frac{d}{dt} (\|\vec{v}(t)\|) \cdot \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|^2} + \frac{\vec{v}(t) \cdot \frac{d}{dt} (\vec{v}(t))}{\|\vec{v}(t)\|} \right) = \\ &= \frac{1}{\|\vec{v}(t)\|} \left(-\frac{d}{dt} (\|\vec{v}(t)\|) + \frac{d}{dt} (\|\vec{v}(t)\|) \right) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, os vetores \vec{T} e $\frac{d\vec{T}}{dt}$ são ortogonais.

(b) Do item (a) temos que

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = -\frac{\frac{d}{dt} (\|\vec{v}(t)\|) \cdot \vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|^2} + \frac{1}{\|\vec{v}(t)\|} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{v}(t)),$$

e como $\vec{a}(t) = \frac{d}{dt} \vec{v}(t)$, segue que

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = -\frac{d}{dt} (\|\vec{v}(t)\|) \frac{\vec{v}(t)}{\|\vec{v}(t)\|^2} + \frac{\vec{a}(t)}{\|\vec{v}(t)\|}.$$

Assim, isolando \vec{a} , temos que

$$\frac{\vec{a}(t)}{\|\vec{v}(t)\|} = \frac{d\vec{T}}{dt} + \frac{d}{dt} (\|\vec{v}(t)\|) \vec{T} \frac{1}{\|\vec{v}(t)\|},$$

e multiplicando $\|\vec{a}(t)\|$ dos dois lados da igualdade chegamos a

$$\vec{a} = \|\vec{v}\| \frac{d\vec{T}}{dt} + \frac{d(\|\vec{v}\|)}{dt} \vec{T},$$

como desejado.

Exemplo 1.5.6 Dada a função vetorial

$$\vec{f}(t) = (t \cos(t) - t \operatorname{sen}(t), t \operatorname{sen}(t) + t \cos(t)),$$

determine $\frac{d^2 \vec{f}}{dt^2}(t)$.

SOLUÇÃO: Temos que $(t \cos(t))' = \cos(t) - t \operatorname{sen}(t)$ e que $(t \operatorname{sen}(t))' = \operatorname{sen}(t) + t \cos(t)$. Assim,

$$\frac{d\vec{f}}{dt}(t) = ((t \cos(t))' - (t \operatorname{sen}(t))', (t \operatorname{sen}(t))' + (t \cos(t))') =$$

$$= (\cos(t) - t \operatorname{sen}(t) - (\operatorname{sen}(t) + t \cos(t)), \operatorname{sen}(t) + t \cos(t) + \cos(t) - t \operatorname{sen}(t))$$

e, conseqüentemente,

$$\frac{d^2 \vec{f}}{dt^2}(t) = (t(\operatorname{sen}(t) - \cos(t)) - 2(\operatorname{sen}(t) + \cos(t)), -t(\operatorname{sen}(t) + \cos(t)) + 2(-\operatorname{sen}(t) + \cos(t))).$$

1.6 Exercícios

Exercício 1.6.1 Encontre a função $\frac{d\vec{f}}{dt}$, em cada item abaixo.

1. $\vec{f}(t) = (7t + 3)\vec{i} + (8 - 5t)\vec{j} - 4\vec{k}$;

2. $\vec{f}(t) = (3t^2 + 4, 8 - t^3, \sqrt{t})$;

3. $\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{t+1}, \sqrt{3t+3}, \frac{1}{t^2} - t \right)$;

4. $\vec{f}(t) = \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{3t^2 - 2t + 1}{3 - 2t^2} \right)$.

5. $\vec{f}(t) = \left(\frac{t}{t-1}, \frac{t^3 - 8}{t^3 + 8}, (t^3 - 2t + 1)(2t^2 + 3t) \right)$;

6. $\vec{f}(t) = \left(\frac{t^2 + 2t + 1}{t^2 - 2t + 1}, \frac{2t + 1}{t + 5}, (3t - 1) \right)$;

7. $\vec{f}(t) = \left(\frac{t^3 + 1}{t^2 + 3}, (t^2 - 2t^{-1} + 1), (t^2 + 3)(2t - 5)(3t + 2) \right)$;

8. $\vec{f}(t) = ((3t + 2)^2(t^2 - 1), (3t^3 + t^{-3})(t + 3)(t^2 - 5), (t^4 - 3t^2 + 4t - 1)^4)$;

$$9. \vec{f}(t) = (3\operatorname{sen}(t), t\operatorname{tg}(t) + \operatorname{cotg}(t), 2t \cos(t));$$

$$10. \vec{f}(t) = \left(\frac{2 \cos(t)}{t-1}, t\operatorname{sen}(t) + \cos(t), 4\operatorname{sen}(t) \cos(t) \right)$$

$$11. \vec{f}(t) = (t^3 - t^2 \cos(t) + 2t\operatorname{sen}(t) + 2 \cos(t), 3\operatorname{sec}(t)\operatorname{tg}(t));$$

$$12. \vec{f}(t) = ((3t^2 + 5)^3(3t - 1)^2, (2t - 5)^{-1}(4t + 3)^{-2}, (t + 3)^3(5t + 1)^2(3t^2 - 4));$$

$$13. \vec{f}(t) = \left(\frac{t-7}{t+2}, \left(\frac{2t-1}{3t^2+t-2} \right)^3, \frac{(t^2-5)^3}{(t^2+5)^2} \right).$$

$$14. \vec{f}(t) = \left(4t^{\frac{1}{2}} + 5t^{\frac{-1}{2}}, 3t^{\frac{2}{3}} - 6t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{-1}{3}}, \sqrt{1+4t^2} \right);$$

$$15. \vec{f}(t) = \left((5-3t)^{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{25-t^2}}, 2 \cos(\sqrt{t}) \right);$$

$$16. \vec{g}(t) = \left(\operatorname{cotg}(\sqrt{3x}), \operatorname{tg}(\sqrt{t^2+1}), \sqrt{\frac{2t-5}{3t+1}} \right);$$

$$17. \vec{f}(r) = \left(\sqrt[3]{2r^3 - 5r^2 + r}, \sqrt{2r} + \sqrt{\frac{2}{r}} \right).$$

Exercício 1.6.2 *Encontre as derivadas de 1ª, 2ª e 3ª ordem das funções vetoriais a seguir.*

$$1. \vec{f}(t) = (t^5 - 2t^3 + t)\vec{i} + t^{\frac{1}{3}}\vec{j} + (2t^4 - 4t^3 + 7t - 1)\vec{k};$$

$$2. \vec{f}(t) = (t^2\sqrt{t} - 5t, \sqrt{t^2+1}, 4 \cos(t^2));$$

$$3. \vec{f}(t) = \left(\operatorname{cotg}^2(t), \frac{t^2}{t^2+4}, \sqrt{\operatorname{sen}(t)+1} \right);$$

$$4. \vec{f}(t) = \left(t^4 - 2t^2 + t - 5, \frac{3}{2x-1}, 2\operatorname{tg}(3t), \cos(2t) - \operatorname{sen}(2t) \right).$$