1.3 Limite e Continuidade de Funções Vetoriais de uma Variável

Agora vamos estender a noção de Limite de funções escalares para funções vetoriais. Precisamos verificar que a imagem da função vetorial se comporta de maneira análoga a uma função escalar, quando nos aproximamos de um determinado número, em cada uma das suas coordenadas, o que nos leva a identificar o limite da função vetorial ao limite de cada função coordenada, quando nos aproximamos de um determinado número, veja a definição.

Definição 1.3.1 *Seja* $\vec{f} : A \setminus \{t_0\} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *uma função vetorial definida em todo* $t \in A$ *exceto, possivelmente, em* t_0. *Seja* $\vec{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ *um vetor constante. Então dizemos que*

$$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{a},$$

se para todo $\epsilon > 0$, *existe um* $\delta > 0$ *tal que* $||\vec{f}(t) - \vec{a}|| < \epsilon$ *sempre que* $0 < |t - t_0| < \delta$.

Em outras palavras, temos que $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$ *se, e somente se,* $\lim_{t \to t_0} f_i(t) = a_i$, *para todo* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$.

Podemos perceber que calcular limite de funções vetoriais é muito similar a calcular limite de funções escalares, a diferença é que precisamos calcular o limite de cada uma das funções coordenadas para obter o limite da função vetorial. Desta forma, podemos estender as propriedades de limite de funções escalares de maneira natural para funções vetoriais, em consequência da linearidade de limite de funções escalares. Vejam algumas propriedades.

Observação 1.3.1 ***PROPRIEDADES:*** *Considere os seguintes limites:* $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{a}$, $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{g}(t) = \vec{b}$ *e que* $\lim\limits_{t \to t_0} h(t) = m$. *Desta forma, temos que:*

1. $\lim\limits_{t \to t_0} \left(\vec{f} \pm \vec{g}\right)(t) = \vec{a} \pm \vec{b}$;

2. $\lim\limits_{t \to t_0} \left(\vec{f} \cdot \vec{g}\right)(t) = \vec{a} \cdot \vec{b}$;

3. $\lim\limits_{t \to t_0} \left(\vec{f} \times \vec{g}\right)(t) = \vec{a} \times \vec{b}$, *quando o produto vetorial estiver definido;*

4. $\lim\limits_{t \to t_0} \left(h \cdot \vec{f}\right)(t) = m \cdot \vec{a}$.

Exemplo 1.3.1 *Dada a função vetorial* $\vec{f}(t) = \left(\sqrt{t^2 + 9}\right)\vec{i} - (2t - 4)\vec{j}$, *determine* $\lim\limits_{t \to 2} \vec{f}(t)$.

SOLUÇÃO: *Temos que* $f_1(t) = \sqrt{t^2 + 9}$. *Desta forma, a função* f_1 *está definida em* $\mathbb{R}$, *pois* $t^2 + 9 \geq 9 > 0$ *e, por isto, podemos calcular o limite da função quando* $x \to 2$. *Logo,* $\lim\limits_{t \to 2} f_1(t) = \sqrt{2^2 + 9} = \sqrt{13}$.

Por outro lado, temos que $f_2(t) = -(2t-4)$. *Desta forma,* $\lim\limits_{t\to 2} f_2(t) = -(2.2-4) = 0$. *Portanto, temos que* $\lim\limits_{t\to 2} \vec{f}(t) = \left(\sqrt{13}, 0\right)$.

Exemplo 1.3.2 *Considere a função vetorial* $\vec{f}(t) = \left(e^{t-1}, \dfrac{t-1}{\sqrt{t}-1}, \sqrt{t+4}\right)$. *Determine* $\lim\limits_{t\to 1} \vec{f}(t)$.

SOLUÇÃO: *Temos que* $f_1(t) = e^{t-1}$ *e, desta forma,* $\lim\limits_{t\to 1} f_1(t) = e^{1-1} = 1$. *Além disso, temos que* $f_2(t) = \dfrac{t-1}{\sqrt{t}-1}$ *e, desta forma, como estamos calculando o limite da função quando* $t \to 1$ *e* $t \geq 0$, *chegamos a* $\lim\limits_{t\to 1} f_2(t) = \dfrac{t-1}{\sqrt{t}-1} = \dfrac{(\sqrt{t}+1)(\sqrt{t}-1)}{\sqrt{t}-1} = \sqrt{t}+1 = 1+1 = 2$.

Por fim, como $f_3(t) = \sqrt{t+4}$, *segue que* f_3 *está definido para todo número real maior ou igual a* -3, *logo* $\lim\limits_{t\to 1} f_3(t) = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. *Portanto,*

$$\lim_{t\to 1} \vec{f}(t) = (0, 2, \sqrt{5}).$$

Exemplo 1.3.3 *Seja* $\vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $\vec{f}(t) = (3-7t-5t^2, \frac{t^2-5t+6}{t-2})$. *Então calcule* $\lim\limits_{t\to 2} f(t)$.

Solução: *Temos que* $f_1(t) = 3-7t-5t^2$, *logo* $\lim\limits_{t\to 2} f_1(t) = 3-7.2-5.2^2 = 3-14-20 = -31$. *Por outro lado, como estamos calculando o limite da função quando* $t \to 2$, *segue que* $t \neq 2$, *o que nos permite tomar* $f_2(t) = \dfrac{t^2-5t+6}{t-2} = \dfrac{(t-2)(t-3)}{t-2} = t-3$ *e, consequentemente,* $\lim\limits_{t\to 2} f_2(t) = 2-3 = -1$.

Portanto, temos que $\lim\limits_{t\to 2} \vec{f}(t) = (-31, -1)$.

Exemplo 1.3.4 *Seja* $\vec{g}(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t^3+8}{t+2}, \dfrac{t^2+4t+4}{t^2-4}, \sqrt{3+t}\right), & se \quad t \neq -2 \\ (0,0,0), & se \quad t = -2 \end{cases}$

Calcule, se existir, $\lim\limits_{t\to -2} \vec{g}(t)$.

Solução: *Como estamos calculando* $\lim\limits_{t\to -2} \vec{g}(t)$, *segue que estamos considerando apenas valores de* $t \neq -2$, *o que nos permite considerar que* $\vec{g}(t) = $
$= \left(\dfrac{t^3+8}{t+2}, \dfrac{t^2+4t+4}{t^2-4}, \sqrt{3+t}\right) = \left(\dfrac{(t+2)(t^2-2t+4)}{t+2}, \dfrac{(t+2)^2}{(t+2)(t-2)}, \sqrt{3+t}\right) =$
$= \left((t^2-2t+4), \dfrac{(t+2)}{(t-2)}, \sqrt{3+t}\right)$ *o que nos leva a*

$$\lim_{t\to -2} \vec{g}(t) = \left(4+4+4, \frac{0}{-4}, \sqrt{3-2}\right) = (12, 0, 1).$$

Exemplo 1.3.5 *Calcule o limite da função vetorial* $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{sen(t)}{t}, \dfrac{1-\cos(t)}{t} \right)$ *quando* $t \to 0$.

Solução: *Vamos calcular cada um dos limites. Observe que* $f_1(t) = \dfrac{sen(t)}{t}$ *e, por isto, temos que* $\lim_{t\to 0} f_1(t)$ *é um dos limites fundamentais, isto é,* $\lim_{t\to 0} f_1(t) = 1$. *Caso não lembremos de tal informação, poderíamos também utilizar a regra de L'Hopital, visto que* $\lim_{t\to 0} sen(t) = 0 = \lim_{t\to 0} t$. *Desta forma, temos que* $\lim_{t\to 0} f_1(t) = \lim_{t\to 0} \dfrac{sen(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{(sen(t))'}{(t)'} = \lim_{t\to 0} \dfrac{\cos(t)}{1} = 1.$

Para $f_2 = \dfrac{1-\cos(t)}{t}$ *também utilizaremos a regra de L'Hopital. Temos que* $\lim_{t\to 0}(1-\cos(t)) = 0 = \lim_{t\to 0} t$ *e, por isto,* $\lim_{t\to 0} f_2(t) = \lim_{t\to 0} \dfrac{1-\cos(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{(1-\cos(t))'}{(t)'} = \lim_{t\to 0} \dfrac{sen(t)}{1} = 0.$

Portanto, temos que $\lim_{t\to 0} \vec{f}(t) = (1, 0)$.

Exemplo 1.3.6 *Calcule* $\lim_{h\to 0} \dfrac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}$, *sendo* $\vec{f}$ *a função vetorial*

$$\vec{f}(t) = \left(sen(t), \cos(t), 3t^2 - e^{2t}\right).$$

Solução: *Temos que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} = \left(\lim_{h\to 0} \frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \cdots, \lim_{h\to 0} \frac{f_n(t+h) - f_n(t)}{h} \right) =$$

$$= \left(f_1'(t), \cdots, f_n'(t)\right).$$

Portanto, $\lim_{h\to 0} \dfrac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} = \left(f_1'(t), \cdots, f_n'(t)\right) = \left(\cos(t), -sen(t), 6t - 2e^{2t}\right)$.

Podemos ainda estar pensando no que acontece quando calculamos o limite de uma função vetorial apenas em uma direção do parâmetro, isto é, quando calculamos os limites laterais. A próxima observação vai esclarecer isto.

Observação 1.3.2 *Os Limites Laterais de uma função vetorial são definidos de maneira análoga a limites de funções vetoriais, ou seja,*

$$\lim_{t\to t_0^+} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t\to t_0^+} f_1(t), \cdots, \lim_{t\to t_0^+} f_n(t) \right) \quad e$$

$$\lim_{t\to t_0^-} \vec{f}(t) = \left(\lim_{t\to t_0^-} f_1(t), \cdots, \lim_{t\to t_0^-} f_n(t) \right).$$

Temos também que as definições de limites no infinito podem ser estendidas a funções vetoriais de maneira natural.

Agora, vamos a outro conceito muito importante estudado no cálculo, o conceito de continuidade. Basicamente temos que uma função é contínua num determinado ponto se o limite da função existe no ponto e se este valor é igual ao valor da função no ponto. Desta forma, como limite de funções vetoriais é o limite de cada uma das coordenadas, segue que uma função vetorial vai ser contínua num ponto se cada uma das suas funções coordenadas é contínua neste ponto, veja a definição.

Definição 1.3.2 *Seja $\vec{f}: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ uma função vetorial. Então, dizemos que $\vec{f}$ é* ***Contínua*** *num ponto $t_0 \in A$ se*

$$\lim_{(t)\to t_0} \vec{f}(t) = \vec{f}(t_0).$$

Em outras palavras, uma função $\vec{f}$ é contínua se, e somente se, cada uma das funções coordenadas é contínua em t_0.

Como a definição de continuidade está diretamente relacionada com a definição de limite, segue que as propriedades são análogas ao cálculo de limites, como visto na observação a seguir.

Observação 1.3.3 *Sejam $\vec{f}$ e $\vec{g}$ duas funções vetoriais contínuas em t_0, então são válidas as seguintes propriedades para continuidade de funções vetoriais:*

1. *dizemos que $\vec{f}$ é contínua se $\vec{f}$ é contínua para todo $t_0 \in D_{\vec{f}}$.*
2. *$\vec{f} \pm \vec{g}$ é contínua em t_0;*
3. *$\vec{f} \cdot \vec{g}$ é contínua em t_0;*
4. *$\vec{f} \times \vec{g}$ é contínua em t_0, quando o produto vetorial estiver definido.*

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 1.3.7 *Seja a função vetorial $\vec{f}(t) = t\vec{i} - t^2\vec{j}$. Então, como $f_1(t) = t$ (que é uma função polinomial) e $f_2(t) = -t^2$ (que também é uma função polinomial), segue que f_1 e f_2 são contínuas em todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, segue que $\vec{f}$ é contínua em $\mathbb{R}$.*

Exemplo 1.3.8 *Seja $\vec{f}(t) = \left(e^{t-1}, \dfrac{t-1}{t^2-1}, 3t\right)$. Então, temos que $f_1(t) = e^{x-1}$ é uma função exponencial e, por isto, f_1 é contínua para todo $t \in \mathbb{R}$. Além disso, temos que $f_3(t) = 3t$ é uma função polinomial e, consequentemente, contínuas em todo $\mathbb{R}$.*

Já para $f_2(t) = \dfrac{t-1}{t^2-1}$, temos que f_2 é uma função racional (a divisão de dois polinomios) e, por isto, f_2 é contínua apenas nos pontos de $\mathbb{R}$ tais que o denominador da função racional (t^2-1) seja não nulo, isto é, apenas para valores reais tais que $t \neq \pm 1$. Portanto, $\vec{f}$ é contínuas em todos os pontos do $\mathbb{R}$ tais que $t \neq \pm 1$.

Agora, vamos aos exercícios.

1.4 Exercícios

Exercício 1.4.1 *Calcule o valor de cada um dos limites a seguir.*

1. $\lim_{t\to 2} \vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t) = \left(2t+4, \dfrac{t^2-4}{t-2}, \dfrac{t+4}{3t-1}\right)$;

2. $\lim_{t\to 0} \vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t) = \left(3-7t-5t^2, (t-2)^{10}(t+4)^2\right)$;

3. $\lim_{t\to 3} \vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t) = \left(3t^2-7t+2, \dfrac{2t^3-5t^2-2t-3}{4t^3-13t^2+4t-3}, \dfrac{4t-5}{5t-1}\right)$;

4. $\lim_{t\to -1} \vec{f}(t)$, *sendo*
$\vec{f}(t) = \left(-t^5+6t^4+2, (t+4)^3(t+2)^{-1}, \dfrac{2t^2-t-3}{t^3+2t^2+6t+5}\right)$;

5. $\lim_{t\to 2} \vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{t+3}{t+2}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{t^2+5t+6}{t+2}\right)\vec{j} - \left(\dfrac{t^2-5t+6}{t-2}\right)\vec{k}$;

6. $\lim_{t\to \frac{1}{2}} \vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t) = (2t+7)\,\vec{i} + \left(\dfrac{4t^2-1}{2t-1}\right)\vec{j} - \left(\dfrac{t+4}{2t}\right)\vec{k}$.

7. $\lim_{t\to 0} \vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{sen(4t)}{t}, \dfrac{2t}{sen(3t)}, \dfrac{sen(9t)}{sen(7t)}, \dfrac{sen(3t)}{sen(6t)}\right)$;

8. $\lim_{t\to \frac{1}{2}} \vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{sen^3(t)}{t^2}, \dfrac{t^2}{sen^2(3t)}\right)$.

Exercício 1.4.2 *calcule, se existir, os limites laterais de cada uma das funções vetoriais a seguir.*

1. $\lim_{t\to 2^+} \vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{t+2}{t^2-4}\right)\vec{i} + 2t\vec{j} + \left(\dfrac{t+2}{4-t^2}\right)\vec{k}$;

2. $\lim_{t\to 3^+} \vec{f}(t)$, *sendo* $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{\sqrt{t^2-9}}{t-3}, \dfrac{\sqrt{[[t]]-t}}{3-t}\right)$;

Exercício 1.4.3 *Estude a continuidade de cada uma das funções vetoriais a seguir.*

1. $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{t^2+t-6}{t+3}\right)\vec{i} + \left(\dfrac{t^2-3t-4}{t-4}\right)\vec{j}$;

2. $\vec{f}(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t^2+t-6}{x+3}, 2t, \dfrac{t^2+6t+9}{t^2-9}\right), & \text{se } t \neq -3 \\ (1,-6,0) & \text{se } t = -3 \end{cases}$;

3. $\vec{f}(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{t^2-3t-4}{t-4}, t^2-12\right) & \text{se } t \neq 4 \\ (2,4), & \text{se } t = 4 \end{cases}$;