Capítulo 1

Funções Vetoriais de uma Variável

1.1 Definição e Exemplos

Suponha, por exemplo, que uma partícula esteja se movimentando de tal forma que para cada instante t as suas coordenadas sejam dadas por $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ e $z = f_3(t)$. Logo, para cada instante $t \geq 0$ existe um vetor $\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ que representa a sua posição.

Desta forma, podemos pensar numa "função" que associa a cada número real t não negativo a um único vetor $\vec{f}(t)$. Esta função é chamada de *Função Vetorial de uma Variável Real*, como apresentamos na definição a seguir.

Definição 1.1.1 *Sejam $f_1, f_2, \cdots, f_n$ funções reais de uma variável real t. Então, o vetor $\vec{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))$ é chamado de Função Vetorial de uma variável real. Cada uma das funções f_1, f_2, $\cdots$, f_n é chamada de Função Coordenada.* ***Notação:*** $\vec{f} : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

O conjunto domínio de uma função vetorial $\vec{f}$ é formado pela intersecção dos domínios das funções coordenadas f_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$, isto é,

$$D_{\vec{f}} = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap \cdots \cap D_{f_n}.$$

Além disso, o conjunto imagem da função vetorial é definido da mesma forma que para funções escalares, ou seja, o conjunto imagem é o conjunto $Im_{\vec{f}} = \vec{f}(A) = \{\omega \in \mathbb{R}^n | \omega = \vec{f}(t) \ para\ algum\ t \in A\}$.

Observação 1.1.1 *Quando estamos no espaço euclidiano, isto é, quanto temos $n = 3$, é comum utilizar a notação $\vec{f}(t) = f_1(t)\vec{i} + f_2(t)\vec{j} + f_3(t)\vec{k}$, para representar uma função vetorial, lembrando que $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$ são os vetores da base ortonormal canônica do $\mathbb{R}^3$.*

Vamos aos exemplos.

Exemplo 1.1.1 *Considere a função vetorial* $\vec{f}(t) = (\sqrt{t-2}, (t-3)^{-1})$. *Então, temos que* $f_1(t) = \sqrt{t-2}$ *está definida para todo número real tal que* $t - 2 \geq 0$, *isto é,* $D_{f_1} = [2, +\infty[$.

Além disso, temos que $f_2(t) = (t-3)^{-1} = \dfrac{1}{t-3}$ *e, por isto,* f_2 *está definida para todo número real tal que* $t - 3 \neq 0$, *isto é,* $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Portanto, temos que $D_{\vec{f}} = \{t \in \mathbb{R} | t \geq 2 \text{ e } t \neq 3\} = [2, +\infty[\setminus\{3\}$.

O conjunto imagem é dado por $Im_{\vec{f}} = \{\omega \in \mathbb{R}^2 | \omega = \vec{f}(t),\ t \in D_{\vec{f}}\}$.

Exemplo 1.1.2 *Considere a função vetorial* $\vec{f}(t) = 2sen(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + 2\vec{k}$. *Então, temos que* $f_1(t) = 2sen(t)$ *e, consequentemente* $D_{f_1} = \mathbb{R}$. *Além disso, temos que* $f_2(t) = 2\cos(t)$ *e, também temos que* $D_{f_2} = \mathbb{R}$. *Por fim,* $f_3(t) = 2$ *e por ser uma função constante, temos que* $D_{f_3} = \mathbb{R}$.

Portanto, temos que $D_{\vec{f}} = \mathbb{R}$. *O conjunto imagem é o conjunto formado por* $Im_{\vec{f}} = \{(2sen(t), 2\cos(t), 2) \in \mathbb{R}^3 | t \in \mathbb{R}\}$.

Um esboço do gráfico pode ser visto na Figura 1.1.

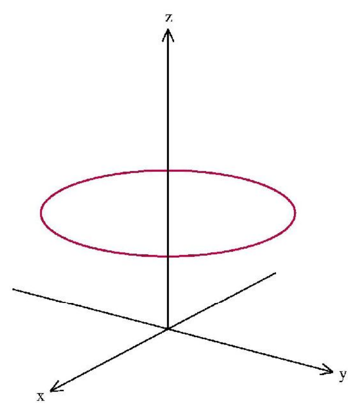

Figura 1.1: Esboço do conjunto $Im_{\vec{f}}$ do Exemplo 1.1.2.

Exemplo 1.1.3 *Considere a função vetorial* $\vec{f}(t) = 2sen(t)\vec{i} + 2\cos(t)\vec{j} + t\vec{k}$, *com* $0 \leq t \leq 4\pi$. *Para este caso, temos que o conjunto domínio já está determinado pela definição do parâmetro t e, por isto,* $D_{\vec{f}} = [0, 4\pi]$.

O conjunto imagem é dado por $Im_{\vec{f}} = \{(2sen(t), 2\cos(t), t) | t \in [0, 4\pi]\}$.

Um esboço do gráfico pode ser visto na Figura 1.2.

Exemplo 1.1.4 *Encontre o conjunto domínio e o conjunto imagem de cada uma das funções vetoriais a seguir:*

1. $\vec{f}(t) = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k}$;

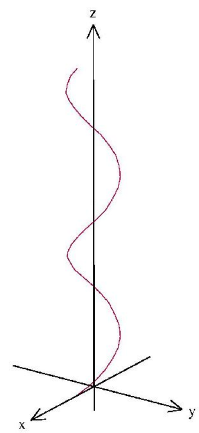

Figura 1.2: Esboço do conjunto $Im_{\vec{f}}$ do Exemplo 1.1.3.

2. $\vec{g}(t) = (\sqrt{t^2-4}, \dfrac{t-5}{2t-2}, 2)$;

3. $\vec{h}(t) = (\sqrt{t^2-9}, t, t^2)$.

Solução: *Vamos resolver o item (a). Temos que $f_1(t) = t$ é uma função polinomial, logo $D_{f_1} = \mathbb{R}$. Temos também que $f_2(t) = t^2$ é uma função polinomial, logo $D_{f_2} = \mathbb{R}$. Por fim, temos que $f_3(t) = t^3$ também é uma função polinomial, logo $D_{f_3} = \mathbb{R}$. Portanto, $D_{\vec{f}} = \mathbb{R}$. O conjunto imagem é dado por $Im_{\vec{f}} = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{R}^3 | t \in \mathbb{R}\}$.*

Agora, para o item (b) temos que $g_1(t) = \sqrt{t^2-4}$ está definida para todos os números reais tal que $t^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow t^2 \geq 4 \Rightarrow \sqrt{t^2} \geq \sqrt{4} \Rightarrow |t| \geq 4 \Rightarrow t \geq 4$ ou $t \leq -4$.

Numa função vetorial $\vec{f}(t)$ podemos pensar nas funções coordenadas como sendo uma composição da forma $\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Por isto, dizemos que uma função vetorial é a *Representação Paramétrica* da função escalar com coordenadas (x, y, z).

Além disso, como estamos associando uma função com um vetor, podemos estender as definições das operações de vetores para as funções vetoriais, como a seguir.

Observação 1.1.2 *Considere $\vec{f}(t) = (f_1(t), \cdots, f_n(t))$ e $\vec{g}(t) = (g_1(t), \cdots, g_n(t))$ funções vetoriais e $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função escalar. Desta forma, temos que:*

1. $(\vec{f} \pm \vec{g})(t) = (f_1(t) \pm g_1(t), \cdots, f_n(t) \pm g_n(t))$;

2. $(h\vec{f})(t) = (h(t).f_1(t), \cdots, h(t).f_n(t))$;

3. $\langle \vec{f}, \vec{g} \rangle = f_1(t).g_1(t) + \cdots + f_n(t).g_n(t)$.

Além disso, o domínio da função obtida na operação será dado pela intersecção dos domínios das funções envolvidas.

Exemplo 1.1.5 *Considere as funções vetoriais* $\vec{f}(t) = (2t - t^{-1}, \sqrt{t^3 - 8})$ *e* $\vec{g}(t) = t^3\vec{i} - 2t^{-1}\vec{j}$ *e considere a função escalar* $h(t) = 3(t-1)^{-1}$. *Efetue as operações a seguir, encontrando o conjunto domínio de cada uma das novas funções obtidas.*

1. $(\vec{f} + \vec{g})(t)$;
2. $(\vec{f}.\vec{g})(t)$;
3. $(h.\vec{g})(t)$;
4. $\langle \vec{f}, \vec{f} \rangle$.

Solução: *Temos que* $f_1 = 2t - t^{-1} = 2t - \dfrac{1}{t}$ *e, por isto,* $D_{f_1} = \mathbb{R}^*$. *Já* $f_2 = \sqrt{t^3 - 8}$ *e, por esta razão,* f_2 *está definida para todo número real tal que* $t^3 - 8 \geq 0$ *isto é,* $D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 2\}$. *Portanto,* $D_{\vec{f}} = [2, +\infty[$.

Para a função $\vec{g}$, *temos que* $g_1 = t^3$ *(que é uma função polinomial), logo* $D_{g_1} = \mathbb{R}$. *Além disso, temos que* $g_2 = -2t^{-1} = \dfrac{-2}{t}$ *e, por isto,* $D_{g_2} = \mathbb{R}^*$. *Portanto,* $D_{\vec{g}} = \mathbb{R}^*$.

Por fim, como $h(t) = 3(t-1)^{-1} = \dfrac{3}{t-1}$, *segue que* $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. *Agora, vamos as operações.*

1. *Temos que* $(\vec{f}+\vec{g})(t) = (f_1(t), f_2(t)) + (g_1(t), g_2(t)) = \left(2t - t^{-1}, \sqrt{t^3 - 8}\right) + (t^3, -2t^{-1}) = \left(t^3 + 2t - t^{-1}, -2t^{-1} + \sqrt{t^3 - 8}\right)$, *sendo que* $D_{\vec{f}+\vec{g}} = D_{\vec{f}} \cap D_{\vec{g}} = [2, +\infty[$.

2. *Aqui, temos que* $(\vec{f} \cdot \vec{g})(t) = (f_1(t), f_2(t)) \cdot (g_1(t), g_2(t)) = f_1(t) \cdot g_1(t) + f_2(t) \cdot g_2(t) = (2t - t^{-1}) \cdot t^3 + \left(\sqrt{t^3 - 8}\right) \cdot (-2t^{-1}) = 2t^4 - t^2 - 2t^{-1}\sqrt{t^3 - 8}$, *sendo neste caso também que* $D_{\vec{f} \cdot \vec{g}} = D_{\vec{f}} \cap D_{\vec{g}} = [2, +\infty[$.

3. *Para este caso, temos que* $(h \cdot \vec{g})(t) = h(t)\,(g_1(t), g_2(t)) = (h(t)g_1(t), h(t)g_2(t)) = 3(t-1)^{-1}\,(t^3, -2t^{-1}) = \left(3t^3(t-1)^{-1}, -6\,[t(t-1)]^{-1}\right)$, *sendo que* $D_{h\vec{g}} = D_h \cap D_{\vec{g}} = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

1.2 Exercícios

Exercício 1.2.1 *Determine o conjunto domínio e o conjunto imagem de cada uma das função abaixo.*

1. $\vec{f}(t) = \left(t^2, \dfrac{1}{t-4}, \sqrt{4 - t^2}\right)$;
2. $\vec{g}(t) = \left(\sqrt{t-2}\right)\vec{i} + \left(\sqrt{t^2 - 4t + 3}\right)\vec{j}$
3. $\vec{f}(t) = -\left(\sqrt[3]{t+7} - \sqrt[5]{t+8}\right)\vec{i} - (|t+2| + 4)\,\vec{k}$;
4. $\vec{g}(t) = \left(\sqrt{3+t} + \sqrt[4]{7-t}, \dfrac{t+2}{t-7}, t - \dfrac{1}{t}\right)$;

5. $\vec{h}(t) = \left(\sqrt{\dfrac{t}{t+1}}, \dfrac{1}{1+\sqrt{t}}, t^2+8t+14\right)$;

6. $\vec{f}(t) = (-t^2+4t-1)\,\vec{i} + (t-2)^{-2}\vec{j} - (t+2)^{-2}\vec{k}$;

7. $\vec{g}(t) = t^3\vec{i} - t^{-3}\vec{j} + |t|\vec{k}$;

8. $\vec{g}(t) = \left(12t-13, \sqrt{2t}, |2t|-3, 3-t, 3-|t|^{-1}\right)$;

9. $\vec{f}(t) = \left(\dfrac{t^2+2t-8}{t-2}, \dfrac{t^3+3t^2-4t-12}{t^2+t-6}\right)$.

Exercício 1.2.2 *Para cada par de funções vetoriais abaixo, obtenha as funções* $\vec{f}+\vec{g}$, $\vec{f}-\vec{g}$, $\vec{f}\cdot\vec{g}$, $\vec{f}\cdot\vec{f}$, $\vec{g}\cdot\vec{g}$ *e, quando possível* $\vec{f}\times\vec{g}$ *e* $\vec{g}\times\vec{f}$. *Escreva também o conjunto domínio de cada uma das novas funções encontradas.*

1. $\vec{f}(t) = (2t, t^2+1)$ *e* $\vec{g}(t) = (3t-2)\,\vec{i} + |t|\vec{j}$;

2. $\vec{f}(t) = \dfrac{t}{1+t^2}\vec{i} + \dfrac{1}{t}\vec{j} + \sqrt{t+1}\vec{k}$ *e* $\vec{g}(t) = \left(t-2, \sqrt{t-2}, \sqrt{t-3}\right)$;

3. $\vec{f}(t) = \left(t^3, \dfrac{1}{t^3}, t-5\right)$ *e* $\vec{g}(t) = \left(t^2-1, \sqrt{t}, t^2+1\right)$;

4. $\vec{f}(t) = \dfrac{t+1}{t-1}\vec{i} - \dfrac{1}{t}\vec{k}$ *e* $\vec{g}(t) = \sqrt{t}\vec{j} + (4-t^2)$;

5. $\vec{f}(x) = \left(\sqrt{t+4}, t^2-4, \sqrt{t+2}, t^2+4\right)$ *e* $\vec{g}(t) = \left(t^2-9, \sqrt{t+5}, \sqrt{t^2-4}, \sqrt{t^2-9}\right)$.