Capítulo 2

Funções Vetoriais de Várias Variáveis

2.1 Definição e Exemplos

Desde as séries iniciais aprendemos a responder a pergunta: "O que é uma função"? Nos cursos de Cálculo foram feitos alguns estudos sobre *Funções*, que nada mais é do que uma regra que associa a todos os elementos de um conjunto A a um único elemento de um outro conjunto B.

É importante ressaltar que a imagem das funções estudas nos Cálculo 01 e 02 eram sempre um número (contradomínio estava contido no conjunto dos números reais). No Capítulo passado começamos a nos preocupar com aplicações cujo resultado final não era um número, ou seja, estudamos funções onde obtínhamos um vetor como imagem, só que para o caso lá estudado, o conjunto domínio estava contido no conjunto dos números reais.

Agora, vamos tomar aplicações cujo domínio tenha várias variáveis e que a sua imagem seja um vetor. Desta forma, o que faremos aqui será muito parecido com o capítulo anterior, mas trabalharemos com as aplicações que tenham como partida um subconjunto A do $\mathbb{R}^n$ e como chegada um conjunto B do $\mathbb{R}^m$, vamos a definição.

Definição 2.1.1 *Sejam m e n dois números naturais positivos. Uma Função Vetorial de n variáveis reais a valores em $\mathbb{R}^m$ (ou uma Aplicação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$) é uma função $\vec{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que associa a todo vetor $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $A \subset \mathbb{R}^n$ a um único vetor*

$$\vec{f}(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_m(x_1, \cdots, x_n))$$

de $\mathbb{R}^m$.

No capítulo anterior trabalhamos com aplicações cuja imagem eram vetores tais que cada uma das funções coordenadas eram funções reais de uma variável real. Neste capítulo vamos generalizar esta ideia, ou seja, vamos trabalhar com aplicações onde cada uma das funções coordenadas do vetor imagem são funções reais de várias variáveis.

Para exemplificar, considere a aplicação $\vec{f}$ de $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\vec{f}(x,y,z) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)) = (x^2+y^2+z^2, x+y+z).$$

Então temos que o domínio da função $\vec{f}$ é o $\mathbb{R}^3$, visto que não existe nenhuma restrição para x ou para y ou para z. Temos que a imagem da função é o conjunto de elementos do $\mathbb{R}^2$ tais que a primeira coordenada seja não-negativa. Agora, vamos aos exemplos.

Exemplo 2.1.1 *Seja* $\vec{f}(x,y,z) = 2x\vec{i} + \dfrac{xz}{2-y}\vec{j} - \sqrt{z}\vec{k}$. *Então,* $\vec{f}$ *é uma função vetorial, cujas funções coordenadas são dadas por*

$$f_1(x,y,z) = 2x,$$
$$f_2(x,y,z) = \frac{xz}{2-y} \quad e$$
$$f_3 = \sqrt{z}.$$

A primeira função coordenada tem como domínio o $\mathbb{R}^3$, *visto que não tem nenhuma restrição para as variáveis* x, $Y4Y$ *ou* z. *Já a segunda função coordenada tem restrição na segunda variável, visto que o denominador* $2-y$ *da função* f_2 *precisa ser não nulo, ou seja,* y *não pode assumir o valor* 2. *Por fim, a terceira função coordenada tem a restrição do radicando* z *não pode ser negativo.*

Desta forma, o domínio da função $\vec{f}$, *fica dado pela intersecção dos domínios de cada uma das funções coordenadas, isto é,*

$$D_{\vec{f}} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 2 \ e \ z \geq 0\}.$$

A imagem desta função é formada por todos os pontos do $\mathbb{R}^3$ *tais que a terceira coordenada seja não negativa, isto é,*

$$Im_{\vec{f}} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\right\}.$$

Exemplo 2.1.2 *Considere* $\vec{f}(x,y) = x\vec{i} + \sqrt{1-x^2-y^2}\vec{j}$. *Então, as funções coordenadas de* $\vec{f}$ *são*

$$f_1(x,y) = x \quad e$$
$$f_2(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}.$$

A primeira função coordenada não tem restrição para as variáveis x *e* y *e, por isto,* $D_{f_1} = \mathbb{R}^2$. *Já a segunda função coordenada só faz sentido para os pontos* (x,y) *tais que* $1-x^2-y^2 \geq 0$, *visto que esta expressão está dentro de uma raiz e, por isto,* $D_{f_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$. *Portanto,*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}.$$

A imagem desta função é o conjunto

$$Im_{\vec{f}} = [-1,1] \times [0,1].$$

Exemplo 2.1.3 *Seja $\vec{f}$ a aplicação $\vec{f}$ dada por*

$$\vec{f}(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right).$$

Então, temos que as funções coordenadas de $\vec{f}$ são

$$f_1(x,y,z) = \frac{x}{1-z} \quad e$$
$$f_2(x,y,z) = \frac{y}{1-z}.$$

A restrição que aparece nas duas funções coordenadas são as mesmas, isto é, estas funções só fazem sentido para os pontos (x,y,z) tais que $1-z \neq 0$, visto que esta expressão está no denominador. Logo,

$$D_{f_1} = D_{f_2} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 1\},$$

e, portanto,

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \neq 1\}.$$

Além disso, temos que o conjunto imagem desta aplicação é formado por todos os elementos do $\mathbb{R}^2$.

Vamos aos exercícios. Bom trabalho!!!!

2.2 Exercícios

Exercício 2.2.1 *Escreva a função vetorial que associa a cada ponto de plano XY ao triplo do seu vetor posição.*

Exercício 2.2.2 *Escreva uma função vetorial que associa a cada ponto do espaço um vetor unitário com a mesma direção do vetor posição e sentido contrário.*

Exercício 2.2.3 *Encontre o conjunto domínio D de cada expressão abaixo para que ela se torne uma função vetorial. Escreva também cada uma das funções coordenadas da função vetorial $\vec{f}$.*

1. $\vec{f}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{4-x^2-y^2}\vec{k}$;
2. $\vec{f}(x,y) = \frac{1}{x}\vec{i} + xy\vec{j}$;
3. $\vec{f}(x,y) = (x^2+y^2, x\sqrt{y}, xy)$;
4. $\vec{f}(x,y) = \left(\frac{1}{xy}, \sqrt{xy}\right)$;
5. $\vec{f}(x,y,z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$;
6. $\vec{f}(x,y,z) = x^2y\vec{i} + y\vec{j} + \sqrt{z}\vec{k}$;
7. $\vec{f}(x,y,z) = y\vec{j} + \sqrt{x+z}\vec{k}$;
8. $\vec{f}(x,y,z) = \sqrt{2-x^2-y^2}\vec{i} + \sqrt{1-x^2-y^2}\vec{j} + z\vec{k}$.